Svar och lösningsförslag till ks3, 11 april 2007,
i 5B1118 Diskret matematik för CL2 och CL3

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$p.
Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke–negativa heltal.)

		sant	**falskt**
a)	I en **abelsk grupp** $(G, *)$ gäller för alla $a, b, c \in G$ att $(a * b) * c = a * (b * c)$. [Ja, det gäller i alla grupper.]	×	
b)	För varje ändlig grupp gäller att alla dess delgrupper är lika stora (har lika många element). [Nej, inte alls.]		×
c)	Alla grupper av ordning 13 är **isomorfa**. [Ja, eftersom 13 är ett primtal är de alla cykliska, så isomorfa.]	×	
d)	Permutationen $\pi \in S_8$ som i cykelform skrivs $\pi = (1\,2\,6\,5)(3\,7)(4\,8)$ är en **jämn** permutation. [Nej, ett udda antal cykler av jämn längd, så udda.]		×
e)	Om n är delbart med 3, är precis en tredjedel av elementen i S_n udda permutationer. [Nej, om $n \geq 2$ är **hälften** av elementen i S_n udda.]		×
f)	$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, dvs heltalen med operationerna addition och multiplikation, utgör en **ring**. [Ja, ett typexempel.]	×	

2a) (1p) Beskriv (strukturen hos) alla grupper med exakt 37 element.

Lösning:

Eftersom 37 är ett primtal är alla grupper med precis 37 element **cykliska**.

---

b) (1p) Låt G vara en grupp av ordning 210, dvs $|G| = 210$.
Om g är ett element i G, dvs $g \in G$, vilka av följande värden är möjliga för ***g*:s ordning** och varför är övriga värden inte tänkbara?

1, 4, 5, 9, 21, 33, 45, 70, 105, 140

Lösning:

Varje elements ordning är en delare till gruppens ordning (och omvänt finns i t.ex. en cyklisk grupp element av varje ordning som delar gruppens ordning), så de möjliga värdena är 1, 5, 21, 70, 105

---

c) (1p) Ange **permutationsmatrisen** för den permutation $\pi \in S_5$ som i enradsnotation (enradsform) ges av $[2\,5\,1\,4\,3]$.

Lösning:

Permutationsmatrisen har element 1 i positionerna $\pi(i)i$, $i = 1 \ldots 5$ och 0 i övriga positioner, så den är

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3) (3p) Låt $\pi, \sigma \in S_5$. π ges i cykelform av $\pi = (1\,4\,2)(3\,5)$, medan σ ges av att $\sigma(1)=2$, $\sigma(2)=5$, $\sigma(3)=1$, $\sigma(4)=4$, $\sigma(5)=3$,.
Ange σ, σ^{-1} och $\pi\sigma^{-1}$ i cykelnotation (cykelform).

Lösning:

$\sigma(1)=2$, $\sigma(2)=5$, $\sigma(5)=3$ etc., så i cykelform $\boldsymbol{\sigma = (1\,2\,5\,3)(4)}$.
Cyklerna i σ^{-1} är omvända mot i σ, så i cykelform $\boldsymbol{\sigma^{-1} = (1\,3\,5\,2)(4)}$.
$\pi\sigma^{-1} = (1\,4\,2)(3\,5)(1\,3\,5\,2)(4) = (1\,5)(2\,4)(3)$, $\boldsymbol{\pi\sigma^{-1} = (1\,5)(2\,4)(3)}$
(1-cyklerna (4) och (3) kan förstås utelämnas.)

---

4) (3p) Låt $G = \{e, a, b, c, d\}$ vara en grupp med 5 element. Fyll i de sju namn som fattas i grupptabellens två första rader nedan. Motivera kortfattat varför just dessa namn skall stå där.

	e	a	b	c	d
e	_	a	_	_	_
a	_	c	_	_	e

Lösning:

Eftersom $ea = a$ är e (som namnet antyder) identitetselementet (multiplicera med a^{-1} från höger). Det ger första raden och första elementet i andra raden. Eftersom grupptabellen är en latinsk kvadrat, kan ab inte vara någon av e, a, b, c, så $ab = d$ och (åter latinsk kvadrat) $ac = b$, dvs

(Man kan också använda att gruppen är cyklisk (ty av primtalsordning) och att a är en generator (ty $\neq e$).)

	$\boldsymbol{e}$	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{c}$	$\boldsymbol{d}$
$\boldsymbol{e}$	$\boldsymbol{e}$	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{c}$	$\boldsymbol{d}$
$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{c}$	$\boldsymbol{d}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{e}$

---

5) (3p) Låt $\pi \in S_6$ vara den permutation som i tvåradsform ges av

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

a) (1p) Finn på cykelform alla element i $\langle \pi \rangle$, dvs den delgrupp till S_6 som genereras av π.

Lösning:

Man finner $\pi = (1\,6\,2)(3\,5)(4)$, så elementen i $\langle \pi \rangle$ är (utan 1-cykler)
$\pi = (1\,6\,2)(3\,5)$, $\pi^2 = (1\,2\,6)$, $\pi^3 = (3\,5)$, $\pi^4 = (1\,6\,2)$, $\pi^5 = (1\,2\,6)(3\,5)$, $\pi^6 = (1) = id$,
så $\boldsymbol{\langle \pi \rangle = \{id, (1\,6\,2)(3\,5), (1\,2\,6), (3\,5), (1\,6\,2), (1\,2\,6)(3\,5)\}}$

---

b) (2p) Finn, åter på cykelform, minst tre av elementen i den **vänstersidoklass** till delgruppen $\langle \pi \rangle$ som innehåller permutationen $(1\,4\,3)$ (cykelnotation).

Lösning:

Med $\sigma = (1\,4\,3)$ är den sökta sidoklassen $\sigma\langle \pi \rangle = \{\sigma, \sigma\pi, \sigma\pi^2, \ldots, \sigma\pi^5\}$, vilket är
$\boldsymbol{\{(1\,4\,3), (1\,6\,2\,4\,3\,5), (1\,2\,6\,4\,3), (1\,4\,3\,5), (1\,6\,2\,4\,3), (1\,2\,6\,4\,3\,5)\}}$