

**Svar och lösningsförslag till extra-ks5, 23 maj 2007,  
i 5B1118 Diskret matematik för CL2, CL3 och Media1**

1) (För varje delfråga ger rätt svar  $\frac{1}{2}$ p, inget svar 0p, fel svar  $-\frac{1}{2}$ p.  
Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke-negativa heltal.)

	sant	falskt
a) Om $G_1$ och $G_2$ är isomorfa grafer så har $G_1$ och $G_2$ samma antal noder och samma antal kanter. Ja, hörn (noder) motsvarar hörn med samma antal kanter.	×	
b) Varje träd är en planär graf. Ja, visas med induktion (två mindre träd ger ett större).	×	
c) Varje graf har ett spännande träd. Nej, inte säkert. Grafen måste vara sammanhängande.		×
d) Om, i en sammanhängande graf, alla noder har en jämn valens (grad) så finns minst en Eulerkrets. Ja, (Euler).	×	
e) En komplett bipartit graf har alltid en Hamiltoncykel. Nej, inte om $ X  \neq  Y $ .		×
f) Varje sammanhängande graf med 17 noder och 18 kanter har precis två olika cykler. Nej, två eller tre olika.		×

2a) (1p) Bestäm antalet kanter i en graf som har 12 noder varav sex har valensen (graden) 5 och sex har valensen (graden) 1.

**Lösning:**

Summan av alla valenser är dubbla antalet kanter,

$$\sum_{v \in V} \delta(v) = 6 \cdot 5 + 6 \cdot 1 = 36 = 2|E|, \text{ så svar: Antalet kanter är 18.}$$

b) (1p) Graferna  $G_1$  och  $G_2$ , med vidstående grannodtabeller, är isomorfa. Ange en isomorfi mellan graferna.

1	2	3	4	resp	$a$	$b$	$c$	$d$
2	3	4	3		$b$	$a$	$b$	$c$
3	1	1				$c$	$d$	$b$
		2				$d$		

**Lösning:**

Isomorfin  $\varphi$  parar ihop hörn med samma valens, så  $\varphi(4) = a, \varphi(3) = b$ . Övriga hörn är båda grannar med valens-3-hörnet och varandra så man kan ta  $\varphi(1) = c, \varphi(2) = d$  eller  $\varphi(2) = c, \varphi(1) = d$ .

**Svar: Isomorfin ges av  $\varphi(1) = c, \varphi(2) = d, \varphi(3) = b, \varphi(4) = a$   
eller av  $\varphi(1) = d, \varphi(2) = c, \varphi(3) = b, \varphi(4) = a$ .**

c) (1p) En planär sammanhängande graf  $G$  har 16 noder och 18 kanter. Hur många områden har en plan ritning av grafen, om området utanför grafen räknas med.

**Lösning:**

Eulers polyederformel ger (med  $v$  st hörn,  $e$  st kanter och  $f$  st områden)  $v - e + f = 2$ . Vi har  $v = 16$  och  $e = 18$  och söker  $f$ . Vi får  $f = 2 - 16 + 18 = 4$ .

**Svar: 4 områden**

3) (3p) Bestäm antalet spännade träd	1	2	3	4	5	6	7	8
till grafen med grannnodtablå:	2	3	4	5	6	7	8	1
	8	1	2	3	4	5	6	7

---

**Lösning:**

Om man ritat grafen, ser man att det handlar om den cykliska grafen med 8 hörn (och 8 kanter). Ett spännande träd uppstår precis om man tar bort en kant i den enda cykeln, dvs vilken som helst av kanterna.

**Svar: Det finns 8 stycken olika spännande träd till grafen.**

---

4) (3p) Visa att det inte finns någon sammanhängande planär graf med 13 noder och 35 kanter. (Du får använda alla satser som ingår i kursen.)

---

**Lösning:**

Eulers polyederformel för en sammanhängande planär graf säger:  $v - e + f = 2$  (gångse beteckningar).

I en plan graf begränsas varje område av minst 3 kanter, så (varje kant "hör till" 2 områden (eller till ett, men räknas i så fall dubbelt))  $3f \leq 2e$ .

$v = 13, e = 35$  skulle ge  $13 - 35 + f = 2$ , så  $f = 24$ , men då fås  $3f = 72 \not\leq 2e = 70$ , så en graf med dessa  $v, e$  kan inte vara sammanhängande och planär, **saken är klar.**

(Man kan förstås också minnas (eller visa ur ovanstående) och utnyttja att för en planär, sammanhängande graf gäller  $e \leq 3v - 6$ .)

---

5) (3p) Grafen  $G$  har precis en cykel. Antalet noder (hörn) i  $G$  är 126 och antalet kanter är 125. Hur många komponenter består  $G$  av.

---

**Lösning:**

Om man tar bort en kant i cykeln, fås en graf med 126 hörn, 124 kanter och lika många komponenter som  $G$ . I den är alltså varje komponent ett träd (så grafen är en skog) och har antalet hörn ett mer än antalet kanter. Totalt finns 2 hörn mer än antalet kanter, så det finns 2 komponenter

**Svar: Antalet komponenter i  $G$  är 2.**

---