Svar och lösningsförslag till ks5, 8 maj 2007,
i 5B1118 Diskret matematik för CL2 och CL3

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$p.
Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke-negativa heltal.)

		sant	**falskt**
a)	Om två grafer är isomorfa, har de för varje k lika många hörn av valens k. Ja, motsvarande hörn har samma valens.	×	
b)	Om två grafer för varje k har lika många hörn av valens k, är de isomorfa. Nej, 2 st K_3 har valenser som K_6.		×
c)	Om en graf har en hamiltoncykel, måste den också ha en eulerkrets. Nej, K_4 ger motexempel.		×
d)	Om en graf har en cykel av udda längd, kan den inte vara ett träd. Ja, ett träd har **inga** cykler.	×	
e)	Den fullständiga (kompletta) grafen K_n är för alla udda n **planär**. Nej, K_n är inte planär för $n \geq 5$.		×
f)	Det **kromatiska polynomet** $P_G(\lambda)$ för grafen $G = (V, E)$ har grad $\|V\|$(= antalet hörn i grafen). Javisst.	×	

2a) (1p) Finns det någon graf med 10 hörn (noder) och följande valenser (grader)? 9, 6, 6, 6, 4, 4, 4, 2, 2, 2
Ge exempel eller motivera varför ingen finns.

Lösning:

I en graf gäller $\sum_{v \in V} \delta(v) = 2|E|$, men summan av talen är 45, ett udda tal!
Så **svar: Nej, det gör det inte.**

---

b) (1p) För vilka $n = 2, 3, \ldots$ har grafen K_n en **eulerkrets**?
K_n är den fullständiga (kompletta) grafen med n hörn (noder).
Glöm inte att motivera ditt svar.

Lösning:

En sammanhängande graf har en eulerkrets precis om alla hörn har jämn valens. K_n:s alla hörn har valens $n - 1$, så **svar: För alla udda $\boldsymbol{n \geq 3}$.**

---

c) (1p) En graf $G = (V, E)$ har det **kromatiska polynomet**

$$P_G(\lambda) = \lambda^4 - 5\lambda^3 + 8\lambda^2 - 4\lambda.$$

Bestäm G:s **kromatiska tal**, $\chi(G)$.

Lösning:

$P_G(\lambda) = 0$ betyder att G inte kan färgas med λ st färger, så $\chi(G)$ är det minsta $\lambda \in \mathbb{N}$ med $P_G(\lambda) \neq 0$.
$P_G(0) = P_G(1) = P_G(2) = 0,\ P_G(3) = 6 \neq 0$, så **svar: $\boldsymbol{\chi(G) = 3}$.**

---

3) En graf har vidstående **grannmatris**.
Är grafen **sammanhängande**?

	A	B	C	D	E	F	G
A	0	0	0	1	0	1	0
B	0	0	0	0	1	0	1
C	0	0	0	0	0	0	1
D	1	0	0	0	0	1	0
E	0	1	0	0	0	0	1
F	1	0	0	1	0	0	0
G	0	1	1	0	1	0	0

Lösning:

Då man ritar en bild av grafen finner man att den har två komponenter (med hörn A,D,F respektive B,C,E,G), så **svar: Nej, det är den inte**.

---

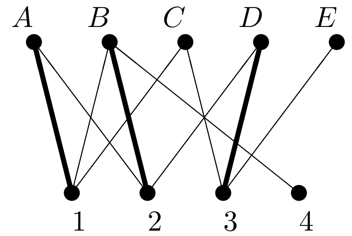
4) (3p) Den sammanhängande grafen $G = (V, E)$ har ritats på en sfäryta så att inga kanter korsar varandra (eller passerar genom något hörn).
G delar upp sfären i 68 områden (i boken kallade fasetter).
Hur många hörn (noder) har G om den har 111 kanter?

Lösning:

Eulers polyederformel ger för antalen hörn (v), kanter (e) och områden (r) sambandet $v - e + r = 2$. Vi har $e = 111$, $r = 68$, så
svar: Antalet hörn är $\boldsymbol{v = |V| = 45}$.

---

5) I den bipartita grafen i figuren har en matchning M markerats med ”feta kanter”. Ange (som en följd hörn) en **utökande alternerande stig** till matchningen och markera i den undre figuren den större matchning M' som denna stig ger upphov till.



Lösning:

En utökande alternerande stig är en alternerande stig (dvs en där varannan kant tillhör matchningen och varannan inte) som börjar och slutar i omatchade hörn. I den givna grafen med matchningen M finns följande (bara en krävs):

Utökande alternerande stigar: $C1A2B4$, $C3D2B4$, $E3D2B4$ ....

Den nya matchningen M' fås genom att byta matchade $\leftrightarrow$ omatchade kanter i stigen. Med den första stigen ovan fås den nya matchningen M':