Matematiska Institutionen
KTH

Lösning till några grupptal 2 inför Ks3 media vt07.

1. Betrakta följande abstrakt definierade multiplikationstabell till en grupp G:

$$\begin{array}{c|cccccc} \circ & a & b & c & d & f & g \\ \hline a & a & b & c & d & f & g \\ b & b & a & f & g & c & d \\ c & c & f & d & a & g & b \\ d & d & g & a & c & b & f \\ f & f & c & g & b & d & a \\ g & g & d & b & f & a & c \end{array}.$$

   (a) Bestäm alla cykliska delgrupper till denna grupp. Ange också elementens ordningar.
   Lösning: Ur tabellen framgår att a är gruppens identitetselemenrt eftersom $ax = x$ för alla x i G. För varje element $x \in G$ bestämmer vi den cykliska grupp som genereras av x, dvs mängden
   $$< x >= \{x, x^2, x^3, \ldots, x^k = a\}$$
   där k är det första, och minsta positiva, heltal för vilket $x^k = a$.
   $< a >= \{a^1 = a\}$,
   $< b >= \{b, b^2 = a\}$,
   $< c >= \{c, c^2 = d, c^3 = a\}$,
   $< d >= \{d, d^2 = c, d^3 = a\}$,
   $< f >= \{f, f^2 = d, f^3 = b, f^4 = c, f^5 = g, f^6 = a\}$,
   $< g >= \{g, g^2 = c, g^3 = b, g^4 = d, g^5 = f, g^6 = a\}$

   (b) Är gruppen själv cyklisk.
   Lösning: Ja eftersom
   $$G = \{a, b, c, d, f, g\} = \{f, d, b, c, g, a\} = \{f, f^2 = d, f^3 = b, f^4 = c, f^5 = g, f^6 = a\} =< f > .$$

   (c) Bestäm samtliga sidoklasser till delgruppen $H = \{a, b\}$.
   Lösning: Vi bestämmer mängderna H, Hb, Hc, Hd, Hf och Hg. Vi får att
   $H = Hb = \{ab, bb\} = \{b, a\}$
   $Hc = \{ac, bc\} = \{c, f\} = Hf$
   $Hd = \{ad, bd\} = \{d, g\} = Hg$.

2. Visa att gruppen ovan är isomorf med grupperna $(Z_6, +)$ och $(Z_7 \setminus \{0\}, \cdot)$.
   Lösning: Vi konstaterar att alla tre grupperna är cykliska med lika många element.
   $$(Z_6, +) =< 1 > \quad \text{och} \quad (Z_7 \setminus \{0\}, \cdot) =< 3 > .$$
   I så fall finns ett standardsätt att konstruera en isomorfi, nämligen vi låter genratorer avbildas på generatorer och potenser av dessa på varandra:
   Om $n = | < g > | = | < h > |$ så ger avbildningen
   $$\varphi(g^k) = h^k, \quad \text{för} \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

en isomorfi mellan grupperna.

x	$\varphi(x)$	$\psi(x)$
f	1	3
$f^2 = d$	$1+1=2$	$3^2 = 2$
$f^3 = b$	$1+1+1=3$	$3^3 = 6$
$f^4 = c$	$1+1+1+1=4$	$3^4 = 4$
$f^5 = g$	$1+1+1+1+1=5$	$3^5 = 5$
$f^6 = a$	$1+1+1+1+1+1=6$	$3^6 = 1$

3. Kan en grupp som inte är abelsk vara cyklisk?

   Lösning: Nej eftersom varje cyklisk grupp är abelsk, nämligen om elementet g genererar den cykliska gruppen så gäller

$$g^n \cdot g^m = g^{n+m} = g^{m+n} = g^m \cdot g^n.$$

4. Kan en grupp som är abelsk vara isomorf med en grupp som inte är abelsk?

   Lösning: Nej. Antag φ betecknar en isomorfi från en icke abelsk grupp G till en grupp H. Antag att $ab \neq ba$ för några element $a, b \in G$. Då gäller ju för isomorfin φ att

$$\varphi(a)\varphi(b) = \varphi(ab) \neq \varphi(ba) = \varphi(b)\varphi(a),$$

   dvs elementen $\varphi(a), \varphi(b) \in H$ kommuterar inte med varandra och H kan inte vara abelsk.

5. Gruppen $G =< Z_{17} \setminus \{0\}, \cdot >$ är cyklisk.

   (a) Bestäm tre olika generatorer till G.

   Lösning: Antalet element i G är 16. Vi får pröva oss fram i sökandet efter ett element som har ordning 16. Vi vet att för varje element $g \in G$ så gäller att ordningen delar talet 16, så ordningen kan endast vara något av talen 1, 2, 4, 8 eller 16.

   Testar elementet 2. $2^2 = 4 \neq 1$ och $2^4 = 16 = -1$ så $2^8 = 2^4 \cdot 2^4 = (-1)^2 = 1$ och alltså ordningen av två är 8.
   Testar elementet 3. $3^2 = 9 \neq 1$ och $3^4 = (-4)$ så $3^8 = 3^4 \cdot 3^4 = (-4)(-4) = 16 = -1 \neq 1$ så enda möjligheten är att elementet 3 har ordning 16.

   För att bestämma fler generatorer undersöker vi nu potenser av elementet 3. Vi visar nu att $3^3 = 9$ också genererar G. Att $(3^3)^k = 1$ är detsamma som att $3^{3k} = 1 = 3^{n16}$ eller att $3k = n16$. Detta ger att 16 delar talet k. Alltså måste 3^3 ha ordningen 16. På samma sätt har elementet 3^5 ordningen 16.

   (b) Lös ekvationerna $x^4 = 1$, $x^5 = 1$ och $x^6 = 1$ i denna grupp G.

   Lösning: Varje element är en potens av 3. Så vi kan anta att en lösning till respektive ekvation kan skrivas $x = 3^y$.
   Då ger ekvationen $x^4 = 1$ oss ekvationen $(3^y)^4 = 3^{4y} = 1$ dvs, som ovan att $4y = n16$ varur vi får att $y = n4$. Så $x = 3^4, 3^8, 3^{12}, 3^{16}$. På samma sätt löser man de andra ekvationerna: $5y = n16$ ger att 16 delar y dvs $x = 1$ resp $6y = 16$ eller att 8 delar talet y.
   Svar: $x^4 = 1$ har rötterna $x = 3^4, 3^8, 3^{12}, 3^{16}$.
   $x^5 = 1$ har rötterna $x = 1$.
   $x^6 = 1$ har rötterna $x = 3^8, 3^{16}$.

(c) Bestäm en delgrupp H till G med åtta element och ange också alla sidoklasser till H i G.

Lösning: Den cykliska delgruppen

$$H =< 3^2 >= \{3^2, (3^2)^2, (3^2)^3, \dots, (3^2)^8\}$$

har åtta element med sidoklasserna

$$H =< 3^2 >= \{3^2, (3^2)^2, (3^2)^3, \dots, (3^2)^8\}$$

och

$$H3 = \{3^{2+1}, 3^{4+1}, 3^{6+1}, \dots, 3^{16+1} = 3\}$$

6. Gruppen H är en delgrupp till en grupp G. Antag H består av 13 element och det finns 7 sidoklasser till H i G.

(a) Hur många element består då G av.

Lösning: Varje element tillhör en sidoklass, sidoklasserna är antingen disjunkta eller identiska och lika stora. Detta ger att antalet element G är $7 \cdot 13 = 91$.

(b) Ge exempel på en grupp G med en delgrupp H som uppfyller dessa förutsättningar.

Lösning: Vi tar $G = (Z_{91}, +)$ med delgruppen

$$H = \{0, 7, 14, 21, 35, \dots, 84\}.$$

7. Visa att $(Z_{10}, +)$ är isomorf med $(Z_2, +) \times (Z_5, +)$.

Lösning: Gruppen $(Z_{10}, +)$ är cyklisk och genereras av elementet 1. Också gruppen

$$(Z_2, +) \times (Z_5, +) = \{(n, m) \mid n \in (Z_2, +), \;\; m \in (Z_5, +)\}$$

är cyklisk och genereras av elementet $(1, 1)$. För cykliska grupper gäller att cykliska grupper med samma antal element alltid är isomorfa

$$< g > \approx < h > \quad \text{om} \quad |< g >| = |< h >|.$$

Isomorfin ges då av $\varphi(g^k) = \varphi(h^k)$ för $k = 1, 2, 3, \dots, n$, där $n = |< g >| = |< h >|$.

8. Låt $m(2, 4, 5)$ beteckna det minsta antal element en grupp G måste ha för att innehålla element av ordningarna 2, 4 och 5. Bestäm $m(2, 4, 5)$ och bestäm en grupp G med $m(2, 4, 5)$ stycken element.

Lösning: Ordningten av ett element delar alltid antalet element i gruppen. Alltså gäller att $2 \mid |G|$, $4 \mid |G|$ och $5 \mid |G|$. Det minsta möjliga antalet element i G är alltså 20.

Betrakta nu $(Z_{20}, +)$ som är cyklisk och innehåller 20 element. För elementet 10 i denna grupp gäller att $10 + 10 = 0$ och alltså har detta element ordningen 2. Vi ser också att elementet 5 har ordningen 4 och elementet 4 har ordning 5, eftersom $n = 4$ är det minsta tal för vilket $n5 = 0$ och $n = 5$ är det minsta tal för vilket $n4 = 0$.

9. Elementen a och b i den abelska gruppen G har ordningarna $\sigma(a)$ respektive $\sigma(b)$.

(a) Bestäm ordningen av $a \circ b$ om $\sigma(a) = 2$ och $\sigma(b) = 2$.

Lösning: Låt 1 beteckna gruppens identitetselement. Eftersom gruppen är kommutativ så gäller

$$(a \circ b) \circ (a \circ b) = (a \circ a) \circ (b \circ b) = 1 \circ 1 = 1$$

Alltså har elementet $(a \circ b)$ en ordning som delar talet 2. Fallet ordningen är lika med ett inträffar endast om $(a \circ b) = 1$, dvs då $b = a^{-1}$. För övrigt måste ordningen vara två.

(b) Bestäm ordningen av $a \circ b$ om $\sigma(a) = 5$ och $\sigma(b) = 7$.
Lösning: Gruppen är abelsk ger att

$$(a \circ b)^{35} = a^{35} \circ b^{35} = (a^5)^7 \circ (b^7)^5 = 1^7 \circ 1^5 = 1.$$

Vi vet från en föreläsning att då gäller att $\sigma(a \circ b) \mid 35$. Tre möjligheter: $\sigma(a \circ b) = 7$, $\sigma(a \circ b) = 5$ eller $\sigma(a \circ b) = 35$. Vi finner att

$$(a \circ b)^5 = a^5 \circ b^5 = 1 \circ b^5 = b^5 \neq 1$$

och att

$$(a \circ b)^7 = a^7 \circ b^7 = a^7 \circ 1 = a^7 \neq 1.$$

Enda återstående möjligheten är alltså att $\sigma(a \circ b) = 35$.

10. Visa att om H och K är delgrupper till samma grupp G så kommer även $H \cap K$ att vara en delgrupp till G.

Lösning: G:s identitet finns i både H och K eftersom dessa är delgrupper till G och finns sålunda i $H \cap K$.

Mängden $H \cap K$ är sluten eftersom

$$h, k \in H \cap K \Rightarrow \left.\begin{array}{c} h, k \in H \\ h, k \in K \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} h \circ k \in H \\ h \circ k \in K \end{array}\right\} \Rightarrow h \circ k \in H \cap K$$

Invers finns till varje element i $H \cap K$ med liknande motivering

$$h \in H \cap K \Rightarrow \left.\begin{array}{c} h \in H \\ h \in K \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} h^{-1} \in H \\ h^{-1} \in K \end{array}\right\} \Rightarrow h^{-1} \in H \cap K$$

Associativa lagen gäller allmänt i G och därför speciellt också i $H \cap K$.