Matematiska Institutionen
KTH

Lösningar till några grupptal inför Ks3 media vt07.

1. Betrakta en grupp G med multiplikationstabellen:

$$\begin{array}{c|cccccccc}
\circ & a & b & c & d & f & g & h & k \\
\hline
a & a & b & c & d & f & g & h & k \\
b & b & c & d & a & g & h & k & f \\
c & c & d & a & b & h & k & f & g \\
d & d & a & b & c & k & f & g & h \\
f & f & g & h & k & a & b & c & d \\
g & g & h & k & f & b & c & d & a \\
h & h & k & f & g & c & d & a & b \\
k & k & f & g & h & d & a & c & b
\end{array}.$$

   (a) Är gruppen abelsk?
   Lösning: Ja, ty tabellen är symmetrisk kring den så kallade huvudaxeln.

   (b) Bestäm identitetselement och bestäm inverser till alla element.
   Lösning: I tabellen syns att $ax = x$ för alla x. Alltså måste a vara ett identitetselement.

   (c) Bestäm alla element som har ordning 2.
   Lösning: Vi inspekterar alla produkter $x \circ x$ i tabellen. Vi finner att endast elementen c, f och h uppfyller $x \neq a$ men $x \circ x = a$. Så
   SVAR: Elemeneten c, f och h.

   (d) Finns det något element som genererar hela gruppen, dvs finns det något element x så att varje element y i G kan skrivas $y = x^k$ för något heltal k.
   Lösning: Vi inspekterar alla element $x \notin \{a, c, f, h\}$, ty dessa element har ordning ett eller ordning två, och alla potenser x^k, för $k = 1, 2, \ldots, 8$, i tabellen. Vi finner att de övriga elementen har ordning 4. Så
   SVAR: Inget element genererar hela gruppen

   (e) Beräkna $abcdef$, $ac^{-1}d^2cd^{-1}$ och f^3g.
   SVAR: Förlåt men e finns inte med så vi beräknar $abcdf = bcdf = ddf = cf = h$, Gruppen är abelsk så $ac^{-1}d^2cd^{-1} = acc^{-1}ddd^{-1} = aada = d$ och då $ff = a$ så gäller $f^3g = fffg = afg = fg = b$.

2. Skriv upp multiplikationstabellen till gruppen $< Z_7 \setminus \{0\}, \cdot >$. Bestäm också samtliga element x i denna grupp sådana att $x^3 = 1$.

   Lösning:

$$\begin{array}{c|cccccc}
\cdot & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
\hline
1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
2 & 2 & 4 & 6 & 1 & 3 & 5 \\
3 & 3 & 6 & 2 & 5 & 1 & 4 \\
4 & 4 & 1 & 5 & 2 & 6 & 3 \\
5 & 5 & 3 & 1 & 6 & 4 & 2 \\
6 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1
\end{array}.$$

   Vi kontrollerar element för element om någon 3-potens blir 1.
   $1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$,

$2 \cdot 2 \cdot 2 = 2 \cdot 4 = 1,$
$3 \cdot 3 \cdot 3 = 2 \cdot 3 = 6,$
$4 \cdot 4 \cdot 4 = 2 \cdot 4 = 1,$
$5 \cdot 5 \cdot 5 = 5 \cdot 4 = 6,$
$6 \cdot 6 \cdot 6 = 1 \cdot 6 = 6.$
Så

SVAR: elementen $x = 1, 2$ eller 4.

3. Går följande tabell att komplettera så att det blir multiplikationstabellen till en grupp?

$$\begin{array}{c|ccccc} \circ & a & b & c & d & f \\ \hline a & a & b & c & d & f \\ b & b & a & f & c & d \\ c & c & d & & & \\ d & d & f & & & \\ f & f & c & & & \end{array}.$$

Något element x måste uppfylla $c \circ x = f$. Enda möjliga element är $x = d$, ty $x = c$ är uteslutet då $b \circ c = f$ och $x = f$ uteslutet då c ej är identitetselementet. Vi har nu tabellen

$$\begin{array}{c|ccccc} \circ & a & b & c & d & f \\ \hline a & a & b & c & d & f \\ b & b & a & f & c & d \\ c & c & d & & f & \\ d & d & f & & & \\ f & f & c & & & \end{array}.$$

Måste finnas ett c i sista kolonnen och ett d i näst näst sista kolonnen. Men inget ytterligare c i sista raden resp näst nst sista raden och inget d i näst sista och näst näst sista raden ger nu tabellen

$$\begin{array}{c|ccccc} \circ & a & b & c & d & f \\ \hline a & a & b & c & d & f \\ b & b & a & f & c & d \\ c & c & d & & f & \\ d & d & f & & & c \\ f & f & c & d & & \end{array}.$$

Återstår att fylla i med a och b. Kalla det ena av elementen för x och det andra för y och antag att $c \circ c = x$. Vi får då följande tabeller, om varje rad resp kolonnskall innehålla verje element precis en gång:

$$\begin{array}{c|ccccc} \circ & a & b & c & d & f \\ \hline a & a & b & c & d & f \\ b & b & a & f & c & d \\ c & c & d & x & f & \\ d & d & f & & & c \\ f & f & c & d & & \end{array} \quad \begin{array}{c|ccccc} \circ & a & b & c & d & f \\ \hline a & a & b & c & d & f \\ b & b & a & f & c & d \\ c & c & d & x & f & y \\ d & d & f & y & x & c \\ f & f & c & d & & \end{array} \quad \begin{array}{c|ccccc} \circ & a & b & c & d & f \\ \hline a & a & b & c & d & f \\ b & b & a & f & c & d \\ c & c & d & x & f & y \\ d & d & f & y & x & c \\ f & f & c & d & y & x \end{array}$$

Alltså två möjliga tabeller.

$\circ$	a	b	c	d	f
a	a	b	c	d	f
b	b	a	f	c	d
c	c	d	a	f	b
d	d	f	b	a	c
f	f	c	d	b	a

resp

$\circ$	a	b	c	d	f
a	a	b	c	d	f
b	b	a	f	c	d
c	c	d	b	f	a
d	d	f	a	b	c
f	f	c	d	a	b

Den sista tabellen kan vi utesluta som en möjlighet eftersom $d \circ c = a$ som är identitet och alltså $d^{-1} = c$, vilket ju inte går ihop med att $c \circ d = f$, eftersom $x^{-1} \circ x = a$ skall gälla för alla x.

Den första tabellen ger en operation som är sluten, finns en identitet och varje element har en invers. Men ej säkert är att associativa lagen är uppfylld, dvs vi måste undersöka om $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ för alla x , y och z.

Vi undersöker nu detta: $(b \circ c) \circ d = f \circ d = b$, men $b \circ (c \circ d) = b \circ f = d$. Vi hade tur, redan vår första kontroll visar att tabellen inte uppfyller associativa lagen.

4. Bestäm ordningen av samtliga element i $< Z_8, + >$.

Lösning: Elementet 0 är identitets element. Elementen 1, $1+1 \neq 0$, $1+1+1 \neq 0$, ...,$1+1+1+1+1+1+1 \neq 0$, $1+1+1+1+1+1+1+1 = 0$ ger att 1 har ordning 8. $2+2 = 4$, $2+2+2 = 6$, $2+2+2+2 = 0$ ger att 2 har ordning 4, Osv på samma sätt får man

SVAR: 1 har ordning 8
2 har ordning 4
3 har ordning 8
4 har ordning 2
5 har ordning 8
6 har ordning 4
7 har ordning 8

5. Kompletera följande tabell så att det blir en multiplikationstabell till en grupp.

$\circ$	a	b	c	d	f
a	a	b	c		
b		c		f	a
c	c	d		a	
d			a		c
f			b		

.

Lösning: Först observerar vi att $a \circ b = b$ vilket ger att a är identitetselementet. Alltså måste följande tabell gälla

$\circ$	a	b	c	d	f
a	a	b	c	d	f
b	b	c		f	a
c	c	d		a	
d	d		a		c
f	f		b		

.

Vi fyller nu i elementen i tur och ordning. Vi utnyttjar att varje rad resp kolumn innehåller varje element i gruppen precis en gång. Ordingen i vilket vi fyller i elementen anges av index.

$\circ$	a	b	c	d	f
a	a	b	c	d	f
b	b	c	d_1	f	a
c	c	d	f_2	a	b_3
d	d	f_5	a	b_6	c
f	f	a_7	b	c_8	d_4

.

6. Givet en grupp G. Visa att för varje par av element x och y i G gäller att x och yxy^{-1} har samma ordning.

   Lösning: Låt $z = yxy^{-1}$ och antag ordningen av x är k och ordningen av z är h. Låt e beteckna gruppens identitetselement. Då gäller att

   $$z^k = yxy^{-1}yxy^{-1}yxy^{-1} \dots yxy^{-1} = yx^ky^{-1} = yy^{-1} = e.$$

   Eftersom ordningen av elementet z är det minsta heltal h sådant att $z^h = e$ så måste orningen av z vara mindre än k, dvs $h \leq k$.

   Vi finner också att

   $$z = yxy^{-1} \quad \Rightarrow \quad y^{-1}zy = y^{-1}yxy^{-1}y, \quad \text{dvs} \quad y^{-1}zy = x.$$

   Då gäller att

   $$x^h = y^{-1}zyy^{-1}zy \dots y^{-1}zy = y^{-1}z^hy = y^{-1}y = e.$$

   Alltså måste ordningen av x vara högst h, dvs $k \leq h$.

   Enda möjligheten för att både $h \leq k$ och $k \leq h$ skall gälla är att $h = k$.