Matematiska Institutionen, KTH

Lösningar till några problem 1 (en del är svåra) till kontrollskrivning nummer 5 för Media1 vt07.

1. Visa att det inte finns någon graf med valenssekvensen 2, 3, 3, 3, 3, 4, 5.

   Lösning: Summan av alla valenser är 23 vilket enligt känt samband är lika med två gånger antalet kanter. Vilket ju är omöjligt emedan 23 är ett udda tal.

2. Tas en kant bort från K_5 blir den så erhållna grafen planär. Visa detta.

   Lösning: Den grafen går att rita så att inga kanter skär varandra. Börja med den kompletta grafen med fyra noder K_4 och rita den plant: en kvadrat med en diagonal och en kant utanför grafen. Rita in en nod utanför grafen och rita sedan kanter från den noden till all de tre noder som är nåbara så får man en plan ritning av grafen

3. Antag G är en sammanhängande 4-regulär graf som dessutom är planär. Hur många områden har en plan ritning av G om G har 16 kanter.

   Lösning: Alla noder har valensen fyra ger att valenssumman är $4v$ om v betecknar antalet noder. Sambandet valenssumman är lika med två gånger antalet kanter ger då att $4v = 2 \cdot 16$ varur vi sluter att $v = 8$.

   Eulers formel $v + r = e + 2$ ger då att antalet områden måste vara $r = 16 + 2 - 8 = 10$.

4. Visa att om G är en graf med minst två noder så har minst två av noderna samma valens.

   Lösning: Pigeonhole principen använder vi på ett sådant sätt att vi sorterar noderna i lådor efter nodernas valens. Vi förutsätter att grafen saknar loopar och multipla kanter. Om G har v noder med valens större än noll, kommer dessa noders valenser att vara något av talen $1, 2, \ldots, v-1$. Ty varje nod men en kant till sig har högst $v-1$ stycken grannar. Minst två noder hamnar i samma låda.

5. Är följande grafer isomorfa?

a	b	c	d	e	f
b	a	a	a	b	c
c	c	b	e	d	d
d	e	f	f	f	e

respektive

1	2	3	4	5	6
2	1	2	3	2	1
4	3	4	5	4	3
6	5	6	1	6	5

   Lösning De är ej isomorfa. Vi ritar dem och ser att den ena grafen innehåller en så kallad 3-cykel *abc* medan den andra saknar 3-cykler.

6. Rita fyra grafer som uppfyller nedanstående

   (a) Varken Hamiltonsk eller Eulersk.

   (b) Eulersk men inte Hamiltonsk.

   (c) Hamiltonsk men inte Eulersk.

   (d) Både Hamiltonsk och Eulersk.

Lösning:

(a) En graf med två noder och en kant emellan.

(b) Tag två noder och drag fyra kanter mellan dessa noder. På var och en av dessa kanter rita ut en nod. Alla noder har då valens två, men man ser att ingen Hamiltoncykel kan ritas ut.

(c) K_4, dvs en graf med fyra noder och med en kant mellan varje par av noder.

(d) K_3, evs en graf med tre noder som sitter ihop i en cykel.

7. Visa att om för varje par av noder x och y i en graf G med n noder gäller att

$$\delta(x) + \delta(y) \geq n - 1$$

så är grafen sammanhängande.

Lösning: Antag grafen ej är sammanhängande och att det inte finns någon stig mellan noderna a och b. Om a ligger i en komponent med t stycken noder och b i en annan komponent med s stycken noder gäller att a har högst $t-1$ grannar och b högst $s-1$ grannar. Dessutom gtäller att $s + t \leq n$, ty grafen har precis n olika noder. Slutsatsen är att

$$\delta(a) + \delta(b) \leq (t - 1) + (s - 1) = t + s - 2 \leq n - 2.$$

Detta striider mot antagandet att $\delta(x) + \delta(y) \geq n - 1$. Alltså är antagandet grafen osammanhängande orimligt.

8. Rita två 3-reguljära grafer med åtta noder.

Lösning: Den ena grafen består av två stycken K_4 och är således ej sammanhängande. Den andra kan vi få fram genom att rita en cykel med 8 noder och sedan rita en kant mellan motstående hörn.

9. Visa att om valensen av alla noder delas av primtalet $p \neq 2$, dvs $p \mid \delta(v)$ så gäller att talet p delar antalet kanter e, dvs $p \mid e$.

Lösning: Studerar valenssumman som vi vet skall vara lika med två gånger antalet kanter. För grafens noder v_1, v_2, ..., v_k ger förutsättningarna i uppgiften att

$$\delta(v_i) = pn_i, \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Vi får då att om e betecknar antalet kanter att

$$2 \cdot e = \sum_{i=1}^{k} \delta(v_i) = \sum_{i=1}^{k} p \cdot n_i = p \sum_{i=1}^{k} n_i.$$

Eftersom p är ett primtal och p inte delar 2 så måste p dela talet e, antalet kanter i grafen.

10. Hur många noder kan en graf med 28 kanter ha som mest om valensen hos varje nod är minst 3.

Lösning: Använder att valenssumman är två gånger antalet kanter, dvs om V betecknar garfens noder att

$$\sum_{v \in V} \delta(v) = 2 \cdot 28 = 56.$$

Om nu $\delta(v) \geq 3$ för alla $v \in V$ så får vi

$$56 = \sum_{v \in V} \delta(v) \geq \sum_{v \in V} 3 = |V| \cdot 3.$$

Detta ger $|V| \leq 56/3$, varur vi erhåller $|V| \leq 18$.

11. Visa att om en graf G är osammanhängande så måste grafens komplement $\bar{G}$ vara sammanhängande.

    Lösning: Dela in grafen i sammanhängande komponenter, dvs delgrafer som i sig själva hänger ihop. Betrakta två godtyckliga noder x och y i grafen. Två fall:

    Fall 1: x och y tillhör olika komponenter. Då finns ingen kant mellan x och y i G, men då gör det det i G:s komplement, par definition. Alltså finns stigen x, y mellan x och y i detta fall.

    Fall 2: x och y tillhör samma komponent. Tag en nod z i en annan komponent än den som x och y tillhör. Som i fall 1 finns kant mellan x och z och mellan y och z. Vi har då följande stig mellan x och y: x, z, y. Då x och y var godtyckligt valda har vi nu visat att G:s komplement är sammanhängande.

12. Visa att om en graf med n noder har fler än $(n-1)(n-2)/2$ kanter så måste grafen vara sammanhängande.

    Lösning: Antag grafen osammanhängande och att den kan delas in i två delgrafer G_1 med x resp G_2 med $n-x$ stycken noder. Det finns alltså ingen kant mellan noder i G_1 och noder i G_2.

    Vi beräknar nu maximalantalet kanter en sådna graf kan ha. Delgrafen G_1 har högst $\binom{x}{2}$ stycken kanter och delgrafen G_2 högst $\binom{n-x}{2}$ kanter. För totala antalet kanter e gäller alltså att

    $$e \geq \binom{x}{2} + \binom{n-x}{2} = \frac{x(x-1)}{2} + \frac{(n-x)(n-x-1)}{2} = \frac{2x^2 - 2nx - n + n^2}{2}$$

    Vilket x ger nu det största vrdet på högerledet ovan. Deriverar vi täljaren

    $$T(x) = 2x^2 - 2nx - n + n^2,$$

    i avsikt att ta reda på ett maxvärde får vi derivatan av täljaren till

    $$T'(x) = 4x - 2n.$$

    Ett extremvärde är alltså $x = n/2$. Andra extremvärden ges av ”intervallets ändpunkter”$x = 0$ och $x = n$. Då $T(0) = n^2 - n$ och $T(n) = n^2 - n$ medan $T(n/2) = \frac{1}{2}n^2 - n$ ser vi att täljarens maxvärde är $n^2 - n$ som ju är lika med $n(n-1)$. Olikheten ovan för antalet kanter kan alltså uttryckas som att

    $$e \geq \frac{n(n-1)}{2}.$$

    Men vad nu detta är ju helt ok enligt förutsättningarn i texten så vad är det vi inte tänkt på. Jo intervallets ändpunkter är varken 0 eller n ty ingen av graferna G_1 elkler G_2 är tom. Så istället sätter vi in $x = 1$ resp $x = n - 1$ och får då den önskade motsägelsen. (GÖR DETTA!)