Matematiska Institutionen, KTH

Lösningar till ytterligare några problem till kontrollskrivning nummer 5 för Media1 vt07.

1. Visa att för varje bipartit graf G med n noder gäller att

$$e \leq (\frac{n}{2})^2.$$

Lösning: Betrakta den bipartita grafen $K_{x,n-x}$, dvs en graf med två nodmängder V_1 och V_2 med x stycken noder respektive med $n-x$ stycken noder. Kanter går bara från noder i V_1 till noder i V_2.

Varje nod i V_1 har alltså högst $n-x$ stycken grannar, noderna i V_2. Från varje nod i V_1 går alltså högst $n-x$ kanter. Då det finns x noder i V_1 så blir antalet kanter i grafen högst lika med $x(n-x)$.

Vi söker nu det största värde som uttrycket $x(n-x)$ kan ha. Sätt $f(x) = x(n-x)$ och derivera denna funktion. Man får $f'(x) = n-2x$. Bland derivatans nollställen och ändpunkterna i det för x tillåtna intervallet $0 \leq x \leq n$, finns extrempunkterna.

Vi finner att $f(0) = 0$, $f(n) = 0$ och $f(\frac{n}{2}) = (\frac{n}{2})^2$.

Eftersom $f(x)$ är maximala antalet kanter hos den kompletta bipartita grafen $K_{x,n-x}$ så har vi att det aldrig kan finnas fler än $(\frac{n}{2})^2$ kanter i en bipartit graf med n stycken noder.

2. En acyklisk graf, dvs grafen saknar cykler, består av 143 noder och 100 kanter.

Hur många komponenter består grafen av.

Lösning: Antag grafen består av komponenterna T_1, T_2, ..., T_k. Varje komponent är en sammanhängande graf. Eftersom grafen cykler, gör även samtliga komponenter det.

Det som karakteriserar ett träd är att de saknar cykler och är samman hängande. Vi utnyttjar nu att för ett träd med v noder och e kanter så gäller att

$$v = e + 1.$$

Beteckna nu antal noder och antalet kanter i träden T_i, för $i = 1, 2, \ldots, k$ med v_i respektive e_i. Då gäller

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_k = 143 \quad \text{och} \quad e_1 + e_2 + \ldots + e_k = 100.$$

Eftersom $v_1 = e_1 + 1$, $v_2 = e_2 + 1$, ..., $v_k = e_k + 1$ får vi

$$(e_1 + 1) + (e_2 + 1) + \ldots + (e_k + 1) = 143 \quad \text{dvs} \quad e_1 + e_2 + \ldots + e_k + k = 143.$$

Detta ger att $k = 143 - 100$. Antalet komponenter är alltså 43.

3. Rita alla träd med 7 noder.

Lösning:

4. Bestäm en transversal till mängderna

$$\{1,2,3\}, \quad \{2\}, \quad \{2,3,5\}, \quad \{4,5\}$$

och förklara varför det inte finns någon transversal till mängderna

$$\{1\}, \quad \{1,3\}, \quad \{1,3\}, \quad \{2,3,4,5\}.$$

Lösning: a) En transversal är $(1,2,3,5)$, ty $1 \in \{1,2,3\}$, $2 \in \{2\}$, $3 \in \{2,3,5\}$ och $5 \in \{4,5\}$.

b) Unionen av de tre första delmängderna innehåller bara två element, och vi kan då inte finna tre olika element som vardera representerar en av de tre mängderna.

5. Bestäm en komplett matchning i den bipartita graf som består av nodmängderna $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_5\}$ och $Y = \{b_1, b_2, b_3, \ldots, b_5\}$ och kanterna

$$E = \{(a_1,b_2),(a_1,b_3),(a_2,b_1),(a_2,b_2),(a_2,b_4),$$

$$(a_3,b_3),(a_3,b_5),(a_4,b_1),(a_4,b_2),(a_4,b_4),(a_5,b_3)\}.$$

Lösning: En av flera möjliga kompletta matchningar är kantmängden

$$M = \{(a_1,b_2),(a_2,b_1),(a_3,b_5),(a_4,b_4),(a_5,b_3)\}.$$

6. Betrakta samma bipartita graf som i föregående uppgift. Låt M beteckna matchningen

$$M = \{(a_1,b_3),(a_2,b_1),(a_3,b_5),(a_4,b_4)\}$$

Bestäm en alternerande stig till M. Använd denna alternerande stig till att göra matchningen större.

Lösning: En alternerande stig börjar i en omatchad X nod. Den enda omatchade X-noden är a_5, som har den enda grannoden b_3. Om b_3 är matchad går stigen till den matchade noden som i detta fall är a_1. Vi skall nu betrakat grannarna till a_1. Vi får flera möjliga stigar att fortsätta. Går vi från a_1 till dess granne b_2 har vi en omatchad Y-nod. Den alternerande stigen är då fullbordad:

$$a_5 - b_3 \star a_1 - b_2.$$

Detta är en alternerande stig till matchningen eftersom startnoden i X är omatchad och slutnoden i Y är omatchad, samta varannan kant tillhör matchningen M och varannan gör det inte. Får nu en större matchning till M genom att bilda

$$(M \setminus \{(a_1,b_3)\}) \cup \{(a_5,b_3),(a_1,b_2)\}.$$

7. Visa att om varje pojke i en skola har k stycken flickor på sin lista och varje flicka finns med på exakt k stycken listor som pojkarna har, så kan varje pojke hitta en flickvän som han vill vara ihop med.

Lösning: Vi skall visa att Halls villkor är uppfyllt. Betrakta pojkmängden A och den flickmängd $J(A)$ som finns med på pojkarna i A's listor.

Betrakta den delgraf som består av noderna i A och noderna i $J(A)$ och som har en kant från pojken a till flickan b om b finns med på a:s lista.

Antalet kanter i denna graf är precis $|A| \cdot k$, ty från varje nod i A går precis k kanter till noder i $J(A)$.

Från varje flicknod i $J(A)$ går precis k stycken kanter, varav en del inte går till pojkar i A. Så i den delgraf vi betraktar har vi högst $|J(A)| \cdot k$ kanter, när vi räknar kanter från flickornas perspektiv.

Vår slutsats är alltså

$$|A| \cdot k = \text{antalet kanter i delgrafen} \leq |J(A)| \cdot k,$$

vilket efter förkortning med k ger att Halls villkor

$$|A| \leq |J(A)|$$

är uppfyllt för varje delmängd A till pojkmängden. Därmed finns enligt Halls bröllopssats en komplett matchning i grafen som beskriver ett sátt att para ihop varje pojke med precis en flicka.

8. Betrakta en samling mängder M_1, M_2, $\ldots$, M_n. Visa att om alla mängder är lika stora och varje element finns med i lika många mängder så finns en transversal till mängderna.

Lösning: Som i föregående uppgift. Elementen i mängderna motsvarar flickorna och mängderna pojkarnas listor.