Matematiska Institutionen
KTH

Svar, på sid 2, och lösningar, på sid 3 och 4, till några kombinatoriktal inför lapp-skrivning 3 media.

1. Bland 10 lärare, 50 flickor och 45 pojkar skall tre skollag utses. Lag 1 består av fem lärare, 20 flickor och 15 pojkar. Lag två består av en lärare, 4 flickor och 13 pojkar och lag 3 består av resterande lärare och elever. Skriv upp ett utryck för antalet sätt detta kan ske på.
2. Bestäm antalet ord man kan bilda med hjälp av bokstäverna i ordet ITTEKNIK som inte innehåller något av orden IT resp INTE som delord.
3. Bestäm antalet surjektioner från $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ till $\{A, B, C, D\}$ sådana att 1 och 3 avbildas på olika element.
4. Beräkna Stirlingtalet $S(6, 2)$.
5. På hur många sätt kan 16 identiska bollar placeras i fem olika lådor om ingen av lådorna får vara tom och antalet bollar i den sista lådan är minst tre.

Svar:

1.

$$\binom{10}{5,1,4} \cdot \binom{50}{20,4,26} \cdot \binom{45}{15,13,17}.$$

2.

$$\binom{8}{2,2,2,1,1} - \binom{7}{2,1,1,1,1,1} - \binom{5}{2,1,1,1} + \binom{6}{2,2,1,1} + \binom{4}{2,1,1}.$$

3.

$$4!S(5,4) - 4!.$$

4.

$$31.$$

5.

$$\binom{9+4}{4}.$$

.

Lösningar

1. *Operation 1:* De tio lärarna delas in i tre grupper, grupp 1 med 5 lärare, grupp 2 med 1 lärare och grupp 3 med 4 lärare. Antalet sådana uppdelningar ges av en multinomialkoefficient:

$$n_1 = \binom{10}{5,1,4} = \frac{10!}{5! \cdot 1! \cdot 4!}.$$

*Operation 2:*De 50 flickorna delas in i tre grupper, grupp 1 med 20 flickor, grupp 2 med 4 flickor och grupp 3 med 26 flickor. Antalet sådana uppdelningar ges av en multinomialkoefficient:

$$n_2 = \binom{50}{20,4,26} = \frac{50!}{20! \cdot 4! \cdot 26!}.$$

Operation 3: På samma sätt för pojkarna.

$$n_3 = \binom{50}{20,4,26} = \frac{50!}{20! \cdot 4! \cdot 26!}.$$

Svaret ges av produkten av dessa tal dvs $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3$.

2. Först beräknar vi det totala antalet ord.

Vi skall placera ut 8 bokstäver i 8 olika positioner i ordet. Vi gör det på ett sådant sätt att vi väljer 2 positioner åt de två bokstäverna T, två positioner åt de två K:na, två positioner åt de två I:na och en position åt de övriga bokstäverna var. Totala antalet ord ges då av multinomialkoefficienten

$$\binom{8}{2,2,2,1,1}.$$

Låt A beteckna den delmängd av dess ord som innehåller kombinationen INTE och B den delmängd som innehåller kombinationen IT. Det sökta svaret ges då av uttrycket

$$\binom{8}{2,2,2,1,1} - |A \cup B|.$$

Antalet element i unionen $|A \cup B|$ är enligt prinipen om inklusion exklusion lika med

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

.

För att beräkna antalet element i A låter vi INTE hänga ihop i en kombination. Vi har nu fem symboler, INTE, I, T, K, K att placera ut, vilket går på

$$\binom{5}{2,1,1,1},$$

olika sätt. För att bestämma antalet ord i mängden B, betraktar vi symbolerna IT, I, T, K, K, N, E. Detta ger INTE att B innehåller

$$\binom{7}{2,1,1,1,1,1},$$

olika ord, ty vissa ord kommer att räknas dubbelt nämligen de av typen XITYITZ eftersom de kan fås både som XI-TYITZ och XITYI-TZ där vi betecknat symbolen IT med I-T. Så dessa ord måste räknas bort. Antalet sådana ord blir lika med anatalet ord man kan bilda med hjälp av symbolerna IT,IT,K,K,N,E. Detta antal är

$$\binom{6}{2,2,1,1}.$$

Således

$$|B| = \binom{7}{2,1,1,1,1,1} - \binom{6}{2,2,1,1}.$$

Slutligen för snittet används symbolerna INTE, IT, K, K, vilket ger

$$\binom{4}{2,1,1},$$

olika ord i snittet av A med B.

När vi nu vet antalet element i mängderna A, B och $A \cap B$ får vi antalet tillåtna ord till

$$\binom{8}{2,2,2,1,1} - \binom{5}{2,1,1,1} - (\binom{7}{2,1,1,1,1,1} - \binom{6}{2,2,1,1}) + \binom{4}{2,1,1}.$$

3. Svaret ges av totala antalet olika surjektioner minus antalet felaktiga, eller otillåtna, dvs de där 1 och 3 avbildas på samma element.

För att beräkna totala antalet surjektioner delar vi först in de fem elementen 1, 2, 3, 4 och 5 i fyra olika säckar, så att varje säck innehåller minst ett element. Detta går på $S(5,4)$ olika sätt. Sedan sätter vi etiketter på säckarna, där en säck får etiketten x om elmenten i säcken avbildas på elementet x. Antalet sätt att sätta ut etiketter är 4!. Totala antalet surjektioner blir då $4! \cdot S(5,4)$.

För att beräkna antalet otillåtna surjektioner låter vi 1 och 3 gå upp i ett nytt element 13. För att beräkna antalet surjektioner från mängden $\{13, 2, 4, 5\}$ till mängden $\{A, B, C, D\}$ gör vi som ovan och får att detta antal är $4! \cdot S(4,4) = 4! = 24$.

Antalet surjektioner sådana att 1 och 3 avbildas på olika element blir då $4!(S(5,4) - 1) = 4! \cdot 9 = 216$.

4. $S(6,2) = S(5,1) + 2S(5,2)$, och $S(5,2) = S(4,1) + 2S(4,2)$ och $S(4,2) = S(3,1) + 2S(3,2)$ och $S(3,2) = S(2,1) + 2S(2,2) = 1 + 2 \cdot 2 = 3$. Så $S(4,2) = 1 + 2\dot{3} = 7$ så $S(5,2) = 1 + 2 \cdot 7 = 15$ så $S(6,2) = 1 + 2 \cdot 15 = 31$.

5. Placera först ut tre bollar i den sista lådan och en boll i vardera av de fyra övriga lådorna. Det återstår nu $16 - 3 - 4 \cdot 1 = 9$ bollar att placera ut. Enligt känt samband är antalet olika möjligheter att placera ut dessa på

$$\binom{9+4}{4}.$$