

Matematiska Institutionen, KTH

Ytterligare några problem till kontrollskrivning nummer 5 för Media1 vt07.

1. Visa att för varje bipartit graf G med n noder gäller att

$$e \leq \left(\frac{n}{2}\right)^2.$$

2. En acyklisk graf, dvs grafen saknar cykler, består av 143 noder och 100 kanter.
Hur många komponenter består grafen av.
3. Rita alla träd med 7 noder.
4. Bestäm en transversal till mängderna

$$\{1, 2, 3\}, \quad \{2\}, \quad \{2, 3, 5\}, \quad \{4, 5\}$$

och förklara varför det inte finns någon transversal till mängderna

$$\{1\}, \quad \{1, 3\}, \quad \{1, 3\}, \quad \{2, 3, 4, 5\}.$$

5. Bestäm en komplett matchning i den bipartita graf som består av nodmängderna $X = \{a_1, a_2, \dots, a_5\}$ och $Y = \{b_1, b_2, b_3, \dots, b_5\}$ och kanterna

$$E = \{(a_1, b_2), (a_1, b_3), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_2, b_4), \\ (a_3, b_3), (a_3, b_5), (a_4, b_1), (a_4, b_2), (a_4, b_4), (a_5, b_3)\}.$$

6. Betrakta samma bipartita graf som i föregående uppgift. Låt M beteckna matchningen

$$M = \{(a_1, b_3), (a_2, b_1), (a_3, b_5), (a_4, b_4)\}$$

Bestäm en alternerande stig till M . Använd denna alternerande stig till att göra matchningen större.

7. Visa att om varje pojke i en skola har k stycken flickor på sin lista och varje flicka finns med på exakt k stycken listor som pojkarna har, så kan varje pojke hitta en flickvän som han vill vara ihop med.
8. Betrakta en samling mängder M_1, M_2, \dots, M_n . Visa att om alla mängder är lika stora och varje element finns med i lika många mängder så finns en transversal till mängderna.