Lösningsförslag till
Lappskrivning 1 i 5B1121 Matematik baskurs
19 september 2005 kl 13.00-14.00

1. **Finn alla reella tal x som uppfyller att $|x-3| \geq 2|x+1|$.**

Lösning: Om $x \geq 3$ så är olikheten $|x-3| \geq 2|x+1|$ ekvivalent med att $x-3 \geq 2x+2$ vilket i sin tur är ekvivalent med att $-5 \geq x$ vilket inte kan gälla för några x i det aktuella intervallet. Inga lösningar i intervallet $x \geq 3$ alltså.

Om $-1 \leq x < 3$ så är $|x-3| \geq 2|x+1|$ ekvivalent med att $3-x \geq 2x+2$ vilket i sin tur är ekvivalent med att $1 \geq 3x$ vilket är detsamma som att $1/3 \geq x$. I det aktuella intervallet har vi alltså lösningarna $-1 \leq x \leq 1/3$.

Om $x < -1$ så är $|x-3| \geq 2|x+1|$ ekvivalent med att $3-x \geq -2x-2$ vilket i sin tur är ekvivalent med att $x \geq -5$. I det aktuella intervallet har vi alltså lösningarna $-5 \leq x < -1$.

Sammantaget får vi att olikheten uppfylls av alla reella tal x sådana att $-5 \leq x \leq 1/3$.

Svar: $-5 \leq x \leq 1/3$.

2. **Faktorisera polynomet $p(x) = x^3 + 6x^2 - x - 30$ i förstagradsfaktorer.**

Lösning: Vi söker först efter nollställen till polynomet, dvs tal x sådana att $p(x) = 0$. Eftersom polynomet är av grad 3 kan det finnas högst 3 reella nollställen. Om det finns nollställen som är heltal så måste dessa dela konstanten -30, så de tal det är värt att testa är alltså ± 1, ± 2, ± 3, ± 5, ± 6, ± 10, ± 15 och ± 30. Prövning ger att $p(2) = 2^3 + 6 \cdot 2^2 - 2 - 30 = 0$ och $p(-3) = (-3)^3 + 6 \cdot (-3)^2 - (-3) - 30 = 0$ och $p(-5) = (-5)^3 + 6 \cdot (-5)^2 - (-5) - 30 = 0$. Nollställena till polynomet är alltså 2, -3 och -5. Faktorsatsen ger nu att polynomet delas jämnt av faktorerna $(x-2)$, $(x+3)$ och $(x+5)$ som alla är av grad 1, med andra ord faktoriseras polynomet så här: $p(x) = (x-2)(x+3)(x+5)$.

Svar: $p(x) = (x-2)(x+3)(x+5)$

Alternativ: Den som tycker prövning är jobbigt kunde ha nöjt sig med att gissa en av rötterna, t ex 2 för att därefter dividera $p(x)$ med $x-2$ och sedan söka nollställen till det andragradspolynom som då blir kvoten. Svaret blir förstås detsamma med den metoden.

3. **Avgör om punkten $(-2,-2)$ ligger innanför eller utanför cirkeln med ekvation $x^2 + 2x + y^2 + 3y = 1$.**

Lösning: Vi kvadratkompletterar och får att $x^2 + 2x + y^2 + 3y = 1$ är ekvivalent med $(x+1)^2 + (y+3/2)^2 = 17/4$. Detta är en ekvation för en cirkel med radie $\sqrt{17}/2$ och medelpunkt i $(-1,-3/2)$. Avståndet från $(-2,-2)$ till $(-1,-3/2)$ är

$\sqrt{(-2+1)^2+(-2+3/2)^2} = \sqrt{5/4} = \sqrt{5}/2$. Eftersom $\sqrt{5}/2$ är mindre än $\sqrt{17}/2$ så ligger punkten innanför cirkeln.

Svar: Punkten ligger innanför cirkeln.