Lösningsförslag till Lappskrivning 2 i 5B1121 Matematik baskurs
30 september 2005 kl 10.15-11.15

1. **Bestäm definitionsmängden till funktionen $f(x) = \ln(3-x^2)$. Avgör om funktionen är inverterbar och ange i så fall inversen.**

Lösning: $\ln x$ är definierat för alla $x > 0$ vilket betyder att definitionsmängden för $\ln(3-x^2)$ är alla x som uppfyller att $3 - x^2 > 0$ dvs alla x som uppfyller att $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$. Eftersom olika x-värden ger upphov till samma funktionsvärde, t ex är $f(1) = f(-1) = \ln 2$, så saknas invers.
Svar: Definitionsmängden är $\{x \in \mathbf{R};\ -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}\}$. Funktionen är inte inverterbar.

2. **Finn alla reella tal x som löser ekvationen** $\sin(3x + \frac{\pi}{6}) = \sin(\frac{-10\pi}{6})$.

Lösning: Eftersom $\sin u = \sin v$ om och endast om $u = v + n2\pi$, n heltal, eller $u = \pi - v + n2\pi$, n heltal, får vi att

$$
\begin{aligned}
&\sin(3x+\frac{\pi}{6}) = \sin(\frac{-10\pi}{6})\\
\Longleftrightarrow\ & 3x + \frac{\pi}{6} = \frac{-10\pi}{6} + n2\pi \text{ eller } 3x + \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{-10\pi}{6} + n2\pi\\
\Longleftrightarrow\ & 3x = \frac{-11\pi}{6} + n2\pi \text{ eller } 3x = \frac{15\pi}{6} + n2\pi\\
\Longleftrightarrow\ & x = \frac{-11\pi}{18} + \frac{n2\pi}{3} \text{ eller } x = \frac{5\pi}{6} + \frac{n2\pi}{3}
\end{aligned}
$$

där n är ett godtyckligt heltal.

3. **Om $z = 1 + i$ och $w = -1 + i$, vad blir då $\frac{z^9}{w^8}$? Svaret ska skrivas på formen $a + bi$.**

Lösning: Vi sätter talen z och w på polär form: $z = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ och $w = \sqrt{2}e^{i3\pi/4}$. Vi får sedan att

$$\frac{z^9}{w^8} = \frac{16\sqrt{2}e^{i9\pi/4}}{16e^{i24\pi/4}} = \sqrt{2}e^{-i\pi 15/4}$$

vilket på rektangulär form skrivs $1 + i$.