Lösningsförslag till
Tentamen i 5B1121 Matematik baskurs
den 17 oktober 2005 kl 08.00-13.00

1. **Bestäm samtliga reella tal x som uppfyller att $\dfrac{2+2x}{1-x^2} \leq 1$?**

Lösning: Vi får följande kedja av ekvivalenser:

$$\begin{aligned}\frac{2+2x}{1-x^2} \leq 1 &\iff \frac{2+2x}{1-x^2} - 1 \leq 0 \iff \frac{2+2x}{1-x^2} - \frac{1-x^2}{1-x^2} \leq 0\\ &\iff \frac{2+2x-1+x^2}{1-x^2} \leq 0 \iff \frac{(x+1)^2}{1-x^2} \leq 0\\ &\iff x < -1 \text{ eller } x > 1.\end{aligned}$$

Svar: $x < -1$ eller $x > 1$.

2. **Finn inversen, om den finns, till funktionen $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln(2x+3)$.**

Lösning: Om den finns så definieras inversen f^{-1} av sambandet $y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$. Vi söker alltså inversen genom att lösa ekvationen $y = \dfrac{1}{2}\ln(2x+3)$ med avseende på x:

$$y = \frac{1}{2}\ln(2x+3) \iff 2y = \ln(2x+3) \iff e^{2y} = 2x+3 \iff \frac{e^{2y}-3}{2} = x.$$

Vi ser att inversen existerar och att den ges av $f^{-1}(y) = (e^{2y}-3)/2$, vilket också kan skrivas $f^{-1}(x) = (e^{2x}-3)/2$.
Svar: $f^{-1}(x) = (e^{2x}-3)/2$

3. **Beräkna den konstanta termen (den som inte innehåller x) i utvecklingen av $\left(x - \dfrac{1}{2x^3}\right)^{12}$. Svaret ska ges på formen p/q, där p och q är heltal.**

Lösning: Enligt binomialformeln är $\left(x - \dfrac{1}{2x^3}\right)^{12} = \displaystyle\sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} x^k \left(-\frac{1}{2x^3}\right)^{12-k}$. Den konstanta termen får vi när $x^k/(x^3)^{12-k} = 1$, dvs när $k = 36 - 3k$, dvs när $k = 9$.
Den konstanta termen blir: $\dbinom{12}{9} x^9 \left(-\dfrac{1}{2x^3}\right)^3 = -\dbinom{12}{9}\dfrac{1}{2^3} = -\dfrac{55}{2}$.

Svar: $-55/2$

---

4. **Lös ekvationen $e^{\cos 2x} = 1$.**

Lösning: Vi tar logaritmen av båda sidor i ekvationen och löser den trigonometriska ekvation som då uppstår: $e^{\cos 2x} = 1 \iff \cos 2x = 0 \iff 2x = \pi/2 + n\pi \iff x = \pi/4 + n\pi/2$, n godtyckligt heltal.

Svar: $x = \pi/4 + n\pi/2$, n godtyckligt heltal.

5. **Faktorisera polynomet $p(x) = x^3 + 2x^2 + 6x + 5$ så långt som möjligt i faktorer med reella koefficienter.**

Vi ser att $p(-1) = 0$ och faktorsatsen ger då att $(x+1)$ är en faktor i $p(x)$. Vi utför divisionen och får att $p(x) = (x+1)(x^2+x+5)$. Kvadratkomplettering av den andra faktorn ger att $x^2 + x + 5 = (x + 1/2)^2 + 19/4$ som är positivt för alla x. Eftersom den andra faktorn i polynomet alltså saknar nollställen går det inte att faktorisera polynomet ytterligare.

Svar: $p(x) = (x + 1)(x^2 + x + 5)$.

6. **Avgör om det är sant att $7^n + 5$ är jämnt delbart med 6 för alla positiva heltal n. Bevisa att det är sant eller bevisa att det är falskt.**

Det är sant. Vi använder mateamtisk induktion i beviset. Om $n = 1$ får vi att $7^n + 5 = 7 + 5 = 12$ som är delbart med 6. Antag nu att $7^k + 5$ är jämnt delbart med 6 för något visst positivt heltal k. Då är $7^{k+1} + 5 = 7 \cdot 7^k + 5 = 7(7^k + 5) - 30$ också delbart med 6 eftersom sista termen uppenbart är det och parentesen är det enligt antagandet. Alltså följer med induktion att $7^n + 5$ är jämnt delbart med 6 för alla positiva heltal n.

7. **Du får veta att de komplexa talen z och w uppfyller att $z - \overline{w} = \overline{z - \overline{w}}$ och $z + \overline{w} = \overline{z + \overline{w}}$. Kan du av dessa båda samband dra slutsatsen att $z = w$?**

Lösning: Om $z = a + ib$ och $w = c + id$ för några reella tal a, b, c, d, så är $z - \overline{w} = a + ib - c + id$ och $\overline{z - \overline{w}} = a - ib - c - id$ och om dessa ska vara lika så måste $b + d = -b - d$, dvs $b = -d$. Och $z + \overline{w} = a + ib + c - id$ och $\overline{z + \overline{w}} = a - ib + c + id$, och om dessa ska vara lika så måste $b = d$. Vi får alltså att $b = d$ och $b = -d$ och enda möjligheten är då att $b = d = 0$. Så det relationerna säger är att z och w har imaginärdel 0, men realdelen får vara vad som helst. Alltså kan till exempel $z = 1$ och $w = 2$.

Svar: Nej.

8. **A. Bevisa utgående från enhetscirkeln att** $\cos(u - v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v$ **för alla reella tal** u, v**.**
B. Använd resultatet i uppgift A för att bevisa att $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$ **för alla reella tal** x**.** *(B får lösas även om inte A har lösts.)*

Lösning: A. Se sidan 97 i kursboken Neymark: Matematisk grundkurs. B. Om vi tar $u = x$ och $v = -x$ i formeln i A får vi att $\cos 2x = \cos x \cos x - \sin x \sin x = 2\cos^2 x - 1$ där vi i sista steget använt den trigonometriska ettan. Det ger direkt att $(\cos 2x + 1)/2 = \cos^2 x$ vilket var vad vi skulle bevisa.