

KTH  
Matematik  
Lars Filipsson

**Facit till  
Några uppgifter att träna på inför Lappskrivning 2**

5B1121 Matematik Baskurs

1. Bestäm definitionsmängd och värdemängd till funktionen  
 $f(x) = \sqrt{2 + 3x}$ . Avgör om  $f$  är inverterbar och bestäm i så fall inversen.

Svar: Definitionsmängden är alla  $x$  som är större än eller lika med  $-2/3$ . Funktionen är inverterbar och inversen är  $f^{-1}(x) = (x^2 - 2)/3$ ,  $x \geq 0$ .

2. Bestäm definitionsmängd och värdemängd till funktionen  
 $f(x) = \sqrt{\ln(5x - 3x^2)}$ . Avgör om  $f$  är inverterbar och bestäm i så fall inversen.

Svar: Definitionsmängd: alla  $x$  som uppfyller  $(5 - \sqrt{13})/6 \leq x \leq (5 + \sqrt{13})/6$ . Invers saknas (olika  $x$  kan ge samma funktionsvärde).

3. Du får veta följande om en funktion  $f$ :  $D_f = \mathbf{R}$ ,  $V_f = \mathbf{R}$ ,  $f$  är inverterbar och  $f(3) = 2$ . Beräkna  $f^{-1}(2)$ .

Svar: 3

4. Vilka av nedanstående påståenden är sanna?  
 $\ln e^{\ln 3} = 3$   
 $\ln e^{\sin^2 x} + \ln e^{\cos^2 x} = 1$ , för alla reella tal  $x$   
 $e^{2x} = (e^x)^2$  för alla tal  $x$   
 $\ln ab - \ln b = \ln a$  för alla positiva reella tal  $a, b$   
 $\ln \frac{a}{b} + \ln \frac{b}{a} = 0$  för alla positiva reella tal  $a, b$ .

falskt, sant, falskt, sant, sant

5. Beräkna  $\cos\left(\frac{4711\pi}{3}\right)$ .

Svar:  $1/2$

6. Finn alla reella tal  $x$  som löser ekvationen  $\cos x = \frac{1}{2}$ .

Svar:  $x = \pm\pi/3 + n2\pi$ ,  $n$  godtyckligt heltal.

7. Finn alla reella tal  $x$  som löser ekvationen  $\sin x = \frac{1}{2}$ .

Svar:  $x = \pi/6 + n2\pi$ ,  $n$  godtyckligt heltal eller  $x = 5\pi/6 + n2\pi$ ,  $n$  godtyckligt heltal.

8. Finn alla reella tal  $x$  som löser ekvationen  $\cos(4x + \frac{\pi}{3}) = \cos(-\frac{32\pi}{3})$ .

Svar:  $x = \pi/12 + n\pi/2$ ,  $n$  godtyckligt heltal eller  $x = \pi/4 + n\pi/2$ ,  $n$  godtyckligt heltal.

9. Utgå från formeln  $\cos(u - v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v$  och härled formeln  $\sin^2 v = (1 - \cos 2v)/2$ .

10. Låt  $z = \sqrt{3} + i$ . Skriv  $z$  på polär form och beräkna sedan  $z^{10}$  och  $1/z^4$ . Svaren ska ges på formen  $a + ib$ .

Svar:  $z = 2e^{i\pi/6}$  och  $z^{10} = 1024e^{10i\pi/6} = 512 - 512\sqrt{3}i$  och  $1/z^4 = -1/32 - (\sqrt{3}/32)i$

11. Om  $z$  är som i föregående uppgift och  $w = 2i$ , vad är realdelen av  $w^9/z^7$ ?

Svar:  $-2$

12. Finn alla reella tal  $x$  som löser ekvationen  $\ln x + \ln(x + 1) = \ln(x + 2)$ .

$x = \sqrt{2}$  (ej minus!)

13. Finn alla reella tal  $x$  som löser ekvationen  $e^x + e^{x/2} = 1$ .

Svar:  $x = \ln((3 - \sqrt{5})/2)$

14. Förenkla så långt som möjligt uttrycket  $\frac{(2^{1/6})^2(\sqrt{8})^3}{2^{1/4}\sqrt{32}}$ .

Svar:  $2^{25/12}$

15. Bestäm definitionsmängd och värdemängd till funktionen  
 $g(x) = \sqrt{1 - \sqrt{2 - x}}$ .

Svar:  $D_f = \{x \in \mathbf{R}; 1 \leq x \leq 2\}$  och  $V_f = \{x \in \mathbf{R}; 0 \leq x \leq 1\}$

16. För vilka reella tal  $a, b$  är det sant att  $a^{\ln b} = b^{\ln a}$ ?

Svar: För alla positiva reella  $a$  och  $b$ .

17. Bestäm  $\cos v$  och  $\tan v$  om  $\pi/2 < v < \pi$  och  $\sin v = 1/7$ .

Svar:  $\cos v = -\sqrt{48}/7$  och  $\tan v = -1/\sqrt{48}$

18. Bestäm  $\cos x$  om  $\sin^2 x = 1/3$  och  $\pi/2 < x < \pi$ .

Svar:  $-\sqrt{2/3}$

19. Skriv upp exakt fem olika lösningar till ekvationen  $\sin 3x = -1/\sqrt{2}$ .

Svar: Välj till exempel fem av lösningarna  $x = -\pi/12 + k2\pi/3$ ,  $k$  heltal (det finns ännu fler). Dvs sätt in fem olika specifika heltal istället för  $k$ .

20. Lös ekvationen  $\sin 2x = \cos x$ .

Svar:  $x = \pi/2 + k\pi$ ,  $k$  heltal, eller  $x = \pi/6 + k2\pi$ ,  $k$  heltal, eller  $x = 5\pi/6 + k2\pi$ ,  $k$  heltal

21. Bestäm det största och det minsta värde som uttrycket  $a \cos x + b \sin x$  kan ta. Svaret kommer förstås att innehålla de reella talen  $a$  och  $b$ .

Svar:  $\sqrt{a^2 + b^2}$  är största och  $-\sqrt{a^2 + b^2}$  är minsta värdet.