

KTH
Matematik
Lars Filipsson

Några extra uppgifter inför Lappskrivning 3

Matematik Baskurs

1. Beräkna $\cos\left(\frac{4711\pi}{3}\right)$.
2. Finn alla reella tal x som löser ekvationen $\cos x = \frac{1}{2}$.
3. Finn alla reella tal x som löser ekvationen $\sin x = \frac{1}{2}$.
4. Finn alla reella tal x som löser ekvationen $\cos\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{32\pi}{3}\right)$.
5. Utgå från formeln $\cos(u - v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v$ och härled formeln $\sin^2 v = (1 - \cos 2v)/2$.
6. Låt $z = \sqrt{3} + i$. Skriv z på polär form och beräkna sedan z^{10} och $1/z^4$. Svaren ska ges på formen $a + ib$.
7. Om z är som i föregående uppgift och $w = 2i$, vad är realdelen av w^9/z^7 ?
8. Bestäm $\cos v$ och $\tan v$ om $\pi/2 < v < \pi$ och $\sin v = 1/7$.
9. Bestäm $\cos x$ om $\sin^2 x = 1/3$ och $\pi/2 < x < \pi$.
10. Skriv upp exakt fem olika lösningar till ekvationen $\sin 3x = -1/\sqrt{2}$.
11. Lös ekvationen $\sin 2x = \cos x$.

12. Bestäm det största och det minsta värde som uttrycket $a \cos x + b \sin x$ kan ta. Svaret kommer förstås att innehålla de rella talen a och b .
13. Bevisa med induktion att $4^{2n+1} + 3^{2+n}$ är jämnt delbart med 13 för alla positiva heltal n .
14. Vi definierar en följd av tal, $a_1, a_2, a_3 \dots$ genom att först sätta $a_1 = 1$ och därefter för alla heltal $n > 1$ sätta $a_{n+1} = 3a_n/(a_n + 1)$. Bevisa med induktion att $a_n < 2$ för alla heltal $n \geq 1$.
15. Bestäm $\sin\left(\arcsin \frac{1}{2}\right)$, $\arcsin\left(\sin \frac{5\pi}{3}\right)$, $\cos\left(\arccos \frac{8}{9}\right)$, $\arccos\left(\cos \frac{7\pi}{6}\right)$, $\cos(\arcsin v)$, $\tan(\arccos u)$.