

KTH  
Matematik  
Lars Filipsson

**Facit till  
Några extra uppgifter inför Lappskrivning 3**

Matematik Baskurs

1. Beräkna  $\cos\left(\frac{4711\pi}{3}\right)$ .

Svar:  $1/2$

2. Finn alla reella tal  $x$  som löser ekvationen  $\cos x = \frac{1}{2}$ .

Svar:  $x = \pm\pi/3 + n2\pi$ ,  $n$  godtyckligt heltal.

3. Finn alla reella tal  $x$  som löser ekvationen  $\sin x = \frac{1}{2}$ .

Svar:  $x = \pi/6 + n2\pi$ ,  $n$  godtyckligt heltal eller  $x = 5\pi/6 + n2\pi$ ,  $n$  godtyckligt heltal.

4. Finn alla reella tal  $x$  som löser ekvationen  $\cos(4x + \frac{\pi}{3}) = \cos(-\frac{32\pi}{3})$ .

Svar:  $x = \pi/12 + n\pi/2$ ,  $n$  godtyckligt heltal eller  $x = \pi/4 + n\pi/2$ ,  $n$  godtyckligt heltal.

5. Utgå från formeln  $\cos(u - v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v$  och härled formeln  $\sin^2 v = (1 - \cos 2v)/2$ .

6. Låt  $z = \sqrt{3} + i$ . Skriv  $z$  på polär form och beräkna sedan  $z^{10}$  och  $1/z^4$ . Svaren ska ges på formen  $a + ib$ .

Svar:  $z = 2e^{i\pi/6}$  och  $z^{10} = 1024e^{10i\pi/6} = 512 - 512\sqrt{3}i$  och  $1/z^4 = -1/32 - (\sqrt{3}/32)i$

7. Om  $z$  är som i föregående uppgift och  $w = 2i$ , vad är realdelen av  $w^9/z^7$ ?

Svar:  $-2$

8. Bestäm  $\cos v$  och  $\tan v$  om  $\pi/2 < v < \pi$  och  $\sin v = 1/7$ .

Svar:  $\cos v = -\sqrt{48}/7$  och  $\tan v = -1/\sqrt{48}$

9. Bestäm  $\cos x$  om  $\sin^2 x = 1/3$  och  $\pi/2 < x < \pi$ .

Svar:  $-\sqrt{2/3}$

10. Skriv upp exakt fem olika lösningar till ekvationen  $\sin 3x = -1/\sqrt{2}$ .

Svar: Välj till exempel fem av lösningarna  $x = -\pi/12 + k2\pi/3$ ,  $k$  heltal (det finns ännu fler). Dvs sätt in fem olika specifika heltal istället för  $k$ .

11. Lös ekvationen  $\sin 2x = \cos x$ .

Svar:  $x = \pi/2 + k\pi$ ,  $k$  heltal, eller  $x = \pi/6 + k2\pi$ ,  $k$  heltal, eller  $x = 5\pi/6 + k2\pi$ ,  $k$  heltal

12. Bestäm det största och det minsta värde som uttrycket  $a \cos x + b \sin x$  kan ta. Svaret kommer förstås att innehålla de rella talen  $a$  och  $b$ .

Svar:  $\sqrt{a^2 + b^2}$  är största och  $-\sqrt{a^2 + b^2}$  är minsta värdet.

13. Bevisa med induktion att  $4^{2n+1} + 3^{2+n}$  är jämnt delbart med 13 för alla positiva heltal  $n$ .

14. Vi definierar en följd av tal,  $a_1, a_2, a_3 \dots$  genom att först sätta  $a_1 = 1$  och därefter för alla heltal  $n > 1$  sätta  $a_{n+1} = 3a_n/(a_n + 1)$ . Bevisa med induktion att  $a_n < 2$  för alla heltal  $n \geq 1$ .