KTH Matematik
Lars Filipsson

Lösningsförslag till
Modell-Tentamen i 5B1121 Matematik baskurs ht 2006

1. **Betrakta polynomet** $p(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2$**. Finn alla reella lösningar till ekvationen** $p(x) = 0$ **och faktorisera polynomet så långt möjligt i rella faktorer.**

Lösning: Vi ser direkt att $x = 1$ och $x = -2$ är nollställen till polynomet. Enligt faktorsatsen är då $p(x)$ jämnt delbart med såväl $x - 1$ som $x + 2$. Om vi dividerar bort $(x-1)(x+2) = x^2 + x - 2$ får vi:

$$\frac{p(x)}{x^2 + x - 2} = x - 2x + 1.$$

Eftersom $x - 2x + 1 = (x-1)^2$ får vi till slut att $p(x)$ har de reella nollställena $x = 1$ (med multiplicitet 3) och $x = -2$ och kan faktoriseras som $p(x) = (x-1)^3(x+2)$

Svar: $p(x)$ har de reella nollställena $x = 1$ (med multiplicitet 3) och $x = -2$ och kan faktoriseras som $p(x) = (x-1)^3(x+2)$

2. **Lös ekvationen** $\ln(x+1) + \ln(x+2) - \ln(x+5) = 0$**.**

Lösning: Uttrycket är bara definierat för $x > -1$. Med hjälp av loglagarna ser vi att den givna ekvationen är ekvivalent med

$$\ln \frac{(x+1)(x+2)}{x+5} = 0$$

vilket i sin tur, för alla $x > -1$, är ekvivalent med att

$$\frac{(x+1)(x+2)}{x+5} = 1$$

dvs $(x+1)(x+2) = x+5$ med lösningar (efter omskrivning och användning av pq-formeln) $x = 1$ och $x = -3$ där dock bara den första lösningen är större än -1.

Svar: $x = 1$

3. **Du får veta att** $\cos(2x + \pi) = \dfrac{1}{2}$**,** $\tan 2x < 0$ **och** $|x| \leq \pi/2$**. Bestäm** x**.**

Lösning: $\cos(2x+\pi) = 1/2 \iff 2x+\pi = \pm\pi/3 + n2\pi \iff x = -\pi/3 + n\pi$ eller $x = -2\pi/3 + n\pi$, n godtyckligt heltal. De enda av dessa lösningar som uppfyller att $|x| \leq \pi/2$ är $x = \pm\pi/3$ och den enda av dessa som uppfyller att $\tan 2x < 0$ är $x = \pi/3$.
Svar: $x = \pi/3$.

4. **Bevisa med induktion att** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$ **för alla heltal** $n \geq 1$**.**

Lösning: Bassteg. Om $n = 1$ så är $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 1$ och $n^2 = 1$. Induktionssteg. Anta att $\sum_{k=1}^{p}(2k-1) = p^2$ för något visst heltal $p \geq 1$. Då gäller att $\displaystyle\sum_{k=1}^{p+1}(2k-1) = p^2 + 2(p+1) - 1 = p^2 + 2p + 1 = (p+1)^2$. Slutsats: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$ för alla heltal $n \geq 1$.

5. **Avgör vilket som är störst,** $\displaystyle\sum_{k=1}^{100}(2k-90)$ **eller** $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(2^k-90)$**.**

Lösning: Den första summan är aritmetisk. Summan är antalet termer gånger medelvärdet av första och sista termen, dvs $100(2-90+200-90)/2 = 1100$. Den andra summan delar vi upp i två och använder formeln för en geometrisk serie på den ena delen: $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(2^k-90) = \sum_{k=1}^{10}2^k + \sum_{k=1}^{10}90 = (1-2^{11})/(1-2) - 1 - 900 = 1146$.
Svar: Den andra.

6. **Finn samtliga komplexa tal** z **som har absolutbelopp** 1 **och ett argument** v **som uppfyller att** $\sin^2 v + \sin v \cos v = 1/2$**.**

Lösning: $|z| = 1$ betyder att $z = e^{iv}$ för något tal v. $\sin^2 v + \sin v \cos v = 1/2 \iff (1-\cos 2v)/2 + (\sin 2v)/2 = 1/2 \iff \sin 2v = \cos 2v \iff 2v = \pi/4 + n\pi \iff v = \pi/8 + n\pi/2$, n heltal. Om vi skriver om detta på rektangulär form ser vi att det finns fyra olika lösningar: $z_1 = \cos(\pi/8) + i\sin(\pi/8)$, $z_2 = \cos(5\pi/8) + i\sin(5\pi/8)$, $z_3 = \cos(9\pi/8) + i\sin(9\pi/8)$, $z_4 = \cos(13\pi/8) + i\sin(13\pi/8)$.

7. **Härled formeln** $\ln ab = \ln a + \ln b$**, utgående från sambandet** $y = e^x \iff x = \ln y$ **och potenslagen** $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$**. (För vilka** a, b **gäller formeln?)**

Lösning: Eftersom $\ln x$ bara är definierat då $x > 0$ så kan bara formeln gälla för positiva a, b. Anta att $a, b > 0$. Då finns x och y så att $a = e^x$ och $b = e^y$ och $x = \ln a$ och $y = \ln b$. Vi får att $\ln ab = \ln(e^x e^y) = \ln e^{x+y} = x + y = \ln a + \ln b$.