KTH Matematik
Examinator: Lars Filipsson

Lösningsförslag till Tentamen i
5B1121 Matematik baskurs och 5B1143 Matematik 1 del A
för Open och D resp CL den 11 oktober 2006 kl 8-13

1. **Finn alla reella tal x som uppfyller ekvationen $|x+1|+|2x-6| = 10$.**

Lösning: För $x \geq 3$ gäller $|x+1|+|2x-6| = 10 \Leftrightarrow x+1+2x-6 = 10 \Leftrightarrow x = 5$, vilket betyder att vi i detta intervall har exakt en lösning $x = 5$. För $-1 \leq x < 3$ gäller $|x+1|+|2x-6| = 10 \Leftrightarrow x+1-(2x-6) = 10 \Leftrightarrow x = -3$, som dock inte ligger i det aktuella intervallet: ingen lösning här alltså. För $x < -1$ gäller $|x+1|+|2x-6| = 10 \Leftrightarrow -(x+1)-(2x-6) = 10 \Leftrightarrow x = -5/3$ vilket betyder att vi i detta intervall har exakt en lösning $x = -5/3$. Ekvationen har alltså exakt två lösningar, $x = 5$ och $x = -5/3$.

Svar: Ekvationen har exakt två lösningar, $x = 5$ och $x = -5/3$.

2. **Två personer har löst samma uppgift på olika sätt och fått svaren**

$$-\frac{x}{2} + \ln x \quad \textbf{respektive} \quad \ln[x(\sqrt{1+e^x} - \sqrt{e^x})] + \ln(\sqrt{1+e^{-x}} + 1).$$

Måste någon av dem ha fel?

Lösning: Vi omformar med hjälp av loglagar och potenslagar och får att

$$\begin{aligned}
\ln[x(\sqrt{1+e^x} - \sqrt{e^x})] + \ln(\sqrt{1+e^{-x}} + 1) &= \ln x + \ln(\sqrt{1+e^x} - \sqrt{e^x}) + \ln(\sqrt{1+e^{-x}} + 1) \\
&= \ln x + \ln(\sqrt{e^x}(\sqrt{1+e^{-x}} - 1) + \ln(\sqrt{1+e^{-x}} + 1) \\
&= \ln x + \ln\sqrt{e^x} + \ln(\sqrt{1+e^{-x}} - 1) + \ln(\sqrt{1+e^{-x}} + 1) \\
&= \ln x + \ln{(e^x)}^{1/2} + \ln e^{-x} \\
&= \ln x + \frac{x}{2} - x \\
&= \ln x + \frac{x}{2} - x \\
&= \ln x - \frac{x}{2}.
\end{aligned}$$

Svar: Nej, de båda svaren överensstämmer.

3. **Om** $2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=1$ **— vilka värden kan då** $\sin x$ **anta?**

Lösning: Vi har att $\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=1/2 \Leftrightarrow x+\frac{\pi}{6}=\pm\frac{\pi}{3}+n2\pi \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{6}\pm\frac{\pi}{3}+n2\pi$. Det vill säga: antingen är $x=\pi/6+n2\pi$ där n är ett godtyckligt heltal eller också är $x=-\pi/2+n2\pi$ där n är ett godtyckligt heltal. I det första fallet är $\sin x=1/2$ och i det andra fallet är $\sin x=-1$.

Svar: Antingen är $\sin x=1/2$ eller också är $\sin x=-1$.

---

4. **Bestäm alla reella tal** x **som uppfyller olikheten** $\frac{x^3+5x^2-3x-22}{x-2}\leq 1$**.**

Lösning: Med hjälp av polynomdivision får vi att $\frac{x^3+5x^2-3x-22}{x-2}=x^2+7x+11$ så för alla $x\neq 2$ har vi att olikheten är ekvivalent med olikheten $x^2+7x+11\leq 1$ vilket i sin tur är ekvivalent med $x^2+7x+10\leq 0$. Med hjälp av pq-formlen får vi att andragradsuttrycket här har nollställena $x=-5$ och $x=-2$ vilket enligt faktorsatsen betyder att $x^2+7x+10=(x+2)(x+5)$ och nu ser vi med hjälp av teckenstudium att $(x+2)(x+5)\leq 0$ om och endast om $-5\leq x\leq -2$.

Svar: $-5\leq x\leq -2$.

5. **Betrakta polynomet** $p(x)=\left(\frac{x}{2}+2\right)^{10}$**. Om** $p(x)$ **skrivs på standardform — vad är då koefficienten framför** x^6 **? Svaret ska förkortas så långt möjligt.**

Lösning: Med binomialformeln fås att $p(x)=\sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}\left(\frac{x}{2}\right)^k 2^{10-k}$. Den sökta termen fås för $k=6$ och är $\binom{10}{k}\left(\frac{x}{2}\right)^k 2^{10-k}=\frac{10!x^6 2^4}{6!4!2^6}=\frac{105x^6}{2}$

Svar: Koefficienten för x^6 är $\frac{105}{2}$

6. **Visa att** $\frac{1}{1-e^{iv}}=\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\cot\frac{v}{2}$**. Gäller formeln för alla** v **?**

Lösning: Vi har att

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1-e^{iv}} &= \frac{1}{1-\cos v - i\sin v} \\
&= \frac{1-\cos v + i\sin v}{(1-\cos v)^2+\sin^2 v} \\
&= \frac{1-\cos v + i\sin v}{2(1-\cos v} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{i\sin v}{2(1-\cos v)} \\
&= \frac{1}{2} + i\frac{2\sin\frac{v}{2}\cos\frac{v}{2}}{4\sin^2\frac{v}{2}} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\cot\frac{v}{2}.
\end{aligned}
$$

Formeln gäller för alla v för vilka den är definierad, dvs för alla v sådan att $1-e^{iv} \neq 0$ med andra ord för alla $v \neq n2\pi$, n heltal.

Svar:

7. **Låt $f(x) = \dfrac{x}{3} - \dfrac{x^3}{3}$. Påstående: För varje heltal n är $f(n)$ är ett jämnt heltal. Bevisa eller motbevisa!**

Lösning: Vi ser att $f(n) = (n-n^3)/3 = n(1-n^2)/3 = -n(n+1)(n-1)/3 = -(n-1)n(n+1)/3$, där n är något heltal. Man inser lätt att av tre konsekutiva heltal så måste minst ett vara jämnt och ett vara delbart med 3. Påståendet följer av detta.