KTH Matematik
Examinator: Lars Filipsson

Lösningsförslag till Tentamen i 5B1121 Matematik baskurs och 5B1143 Matematik 1 del A för Open och D resp CL den 16 januari 2007 kl 8-13

1. **Hur många reella nollställen har polynomet** $p(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 - 2x - 12$ **?**

Lösning: Om polynomet har några heltalsnollställen så måste heltalen i fråga dela 12. Prövning ger att $x = -2$ och $x = 3$ är nollställen till polynomet. Faktorsatsen ger att såväl $x+2$ som $x-3$ är faktorer i polynomet. Polynomdivision ger sedan att $p(x) = (x+2)(x-3)(x^2+2)$ där den sista faktorn aldrig kan bli noll och följaktligen inte heller kan faktoriseras. Polynomet har alltså två reella nollställen.

Svar: Två

2. Låt $f(x) = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$ och $g(y) = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+y}{1-y}$. Avgör om någon av dessa funktioner är invers till den andra. Bestäm också definitionsmängden för g.
(Tips: $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ och $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.)

Lösning: Den naturliga logaritmen är definierad för alla positiva reella tal. Eftersom $(1+y)/(1-y)$ är positivt om och endast om $-1 < y < 1$ så är definitionsmängden för funktionen g precis $\{y \in \mathbf{R} : -1 < y < 1\}$. Vidare ser vi att värdemängden för g är $\mathbf{R}$. Det är också lätt att se att definitionsmängden för f är $\mathbf{R}$ och värdemängden för f är $\{y \in \mathbf{R} : -1 < y < 1\}$. Nu är funktionerna varandras inverser precis när $g(f(x)) = x$ och $f(g(y)) = y$ för alla rella tal x och alla y s. a. $-1 < y < 1$. Vi får

$$\begin{aligned}
g(f(x)) &= \frac{1}{2}\ln\frac{1+\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}}{1-\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}} \\
&= \frac{1}{2}\ln\frac{e^x+e^{-x}+e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}-e^x+e^{-x}} \\
&= \frac{1}{2}\ln\frac{2e^x}{2e^{-x}} \\
&= \frac{1}{2}\ln e^{2x} \\
&= x.
\end{aligned}$$

På samma sätt fås att $f(g(x)) = x$. Vi ser att funktionerna är varandras inverser.

3. **Bestäm alla reella tal x som uppfyller villkoren: $|x| < \pi/2$, $\tan x > 0$ och $\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$**

Lösning: Vi börjar med det sista villkoret, $\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, som är uppfyllt om och endast om $2x - \dfrac{\pi}{4} = \pm\dfrac{\pi}{4} + n2\pi$, för något heltal n, dvs om och endast om $x = \dfrac{\pi}{8} \pm \dfrac{\pi}{8} + n\pi$, med andra ord om och endast om $x = \dfrac{\pi}{4} + n\pi$ eller $x = n\pi$, där n får vara vilket heltal som helst. Om nu dessutom $|x| < \pi/2$ så kan x bara vara $\dfrac{\pi}{4}$ eller 0. Av dessa båda möjliga val av x är det bara $x = \dfrac{\pi}{4}$ som uppfyller att $\tan x > 0$.

Svar: $x = \dfrac{\pi}{4}$

---

4. **Hur många lösningar har ekvationen $\cos x = \dfrac{|x|}{x}$ i intervallet $-10 < x < 10$?**

Lösning: För $x = 0$ är ekvationen inte definierad. För övriga x sönderfaller lösningen i två fall, $x > 0$ och $x < 0$.

Fall 1. Om $x > 0$ är ekvationen ekvivalent med att $\cos x = 1$ vilket inträffar när $x = n2\pi$, n positivt heltal, men av dessa lösningar ligger bara $x = 2\pi$ i det angivna intervallet. En lösning i fall 1 alltså.

Fall 2. Om $x < 0$ är ekvationen ekvivalent med att $\cos x = -1$ vilket inträffar när $x = n\pi$, n udda negativt heltal, och av dessa lösningar ligger $x = -\pi$ och $x = -3\pi$ i det angivna intervallet. Två lösningar i fall 2 alltså.

Svar: Tre

5. **Finn alla reella tal x som uppfyller olikheten $|x| > |2x + 1|$.**

Lösning: Vi får dela upp lösningen i tre fall.

Fall 1. Om $x \geq 0$ så är den givna olikheten ekvivalent med att $x > 2x + 1$ vilket i sin tur är evkivalent med att $x < -1$, vilket dock inte är tillåtet i det aktuella fallet. Inga lösningar då $x \geq 0$ alltså.

Fall 2. Om $-1/2 \leq x < 0$ så är den givna olikheten ekvivalent med att $-x > 2x+1$ vilket är ekvivalent med att $3x < -1$ vilket är samma sak som att $x < -1/3$. Lösningar i fall två alltså alla x s. a. $-1/2 \leq x < -1/3$.

Fall 3. Om $x < -1/2$ så är den givna olikheten ekvivalent med att $-x > -2x - 1$ vilket är ekvivalent med att $x > -1$ vilket ger oss lösningarna $-1 < x < -1/2$ i detta fall.

Sammanfattningsvis har vi alltså att olikheten löses av alla reella tal x sådana att $-1 < x < -1/3$.

Svar: $-1 < x < -1/3$.

6. **Avgör vilket som är störst,** $\displaystyle\sum_{k=3}^{10} 2^k$ **eller** $\displaystyle\sum_{k=6}^{55}(2k-20)$ **eller** $\displaystyle\sum_{k=0}^{11}\binom{11}{k}$**.**

Lösning: Den första är enligt formeln för en geometrisk summa lika med $(1-2^{11})/1-4-2-2-1 = 2040$

Den tredje är enligt binomialsatsen precis lika med $(1+1)^{11} = 2^{11} = 2048$

Den andra är enligt formeln för en aritmetisk summa (antalet termer gånger medelvärdet av första och sista termen) lika med $50 \cdot (-8+90)/2 = 2050$. Vi ser att denna är störst.

Svar: Den andra

7. **Bestäm samtliga komplexa tal z som uppfyller ekvationen $z^8 = 1$. Skriv lösningarna på rektangulär form, dvs på formen $a + ib$.**

Lösning: Vi använder polär form. Med $z = re^{iv}$ får vi $z^8 = 1$ om och endast om $r^8 e^{i8v} = e^{in2\pi}$ som är uppfyllt om och endast om $r^8 = 1$ och $8v = n2\pi$ där n får vara vilket heltal som helst. Klart alltså att

$r = 1$ och

$v = n\pi/4$, n heltal.

Lösningarna är alltså $z = e^{in\pi/4}$ där n får vara vilket heltal som helst. Eftersom den komplexa exponentialfunktionen är periodisk ger inte alla dessa n olika lösningar, utan $n = 0, 1, 2, \ldots, 7$ ger alla lösningar. När de skrivs på rektangulär form får vi:

Svar: $\pm 1,\ \pm i,\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{i}{\sqrt{2}}$