KTH
Matematik
Per Enqvist

Inlämningsuppgift 2
i kursen 5B1126 Matematik förberedande kurs, TIMEH1, vt 2005

Skriv namn och personnummer på första sidan. När ni lämnar in er lösning garanterar ni samtidigt att ni arbetat med den på ett sätt som stämmer överens med hederskodexen. Samarbete och frågvishet uppmuntras, men att plagiera och att åka snålskjuts är förbjudet.

Inlämning sker på lektionen den 1/3. Senare bestämmer vi ett datum då ni muntligt får försvara och förklara ert arbete.

Det ni ska lämna in är följande: En rapport innehållande en presentation och lösning av det tillämpade problemet. Ni skall förklara hur ni har kommit fram till era resultat och beskriva vilka metoder ni använt, och bifoga de program ni har skrivit samt lämpliga utskrifter av grafer. Tänk på att det ska gå att följa er lösning även om man är lite trögtänkt och inte har sett problemet förut.
Ni kommer att använda matematikprogrammet Matlab för att åskådliggöra era resultat. Det är inte meningen att ni ska bli fullfjädrade Matlabprogrammerare, men att ni ska få en liten inblick i hur det kan användas. Information om programmet hittar ni på hemsidan under rubriken "inlämning 2".

I den här uppgiften ska ni studera *Bodes formel* för numerisk integration med 4 delintervall. Ni ska använda en approximation av integraler som ser ut som följande:

$$\int_{-2h}^{2h} f(x)\,dx \approx Af(-2h) + Bf(-h) + Cf(0) + Bf(h) + Af(2h), \tag{$\dagger$}$$

dvs integralen ska approximeras genom att man tar en linjär kombination av funktionen f's värden i fem punkter, se även figur 1.

FIGUR 1. Sampling av funktionen $f(x)$ för approximering av integralens värde

(i) Först ska vi bestämma konstanterna A, B och C så att approximeringen fungerar bra för jämna polynom i fallet då h=1. Vi gör detta genom att bestämma vänster och höger led exakt i ekvation (†) för funktionerna $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x^2$ och $f_3(x) = x^4$.

Det exakta integralvärdet kan bestämmas i Matlab, och konstanterna kan bestämmas genom att skriva in ett uttryck av samma typ som följande

```
[A,B,C]=solve('3*A+2*B-C=3','2*A+B+C=1','4*A+5*B+3*C=12')
```

(ii) Nu ska vi använda Bodes formel för att approximera följande integraler mha de konstanter som bestämdes i uppgift (i).

(a)
$$\int_{-2}^{2} \left(4x^4 + 3x^2 + 1\right)\,dx$$

(b)
$$\int_{-2}^{2} \left(x^3 + 3x + 1\right)\,dx$$

(c)
$$\int_{-1/2}^{1/2} \cos(x)\,dx$$

(d)
$$\int_{-1/2}^{1/2} \sin(x)\,dx$$

(e)
$$\int_{-2}^{2} e^{-x^2}\,dx$$

Bestäm även det exakta värdet, och felet i approximationen. I vilka fall får man en bra approximation och i vilka fall blir det dåligt ? Kan ni förklara varför det blir så ?

(iii) Till sist generaliserar vi formel (†) ovan till följande:

$$\int_{-2h}^{2h} f(x)\,dx \approx Af(-2h) + Bf(-h) + Cf(0) + Df(h) + Ef(2h),$$

där vi nu har fem konstanter: A, B, C, D, E. Bestäm konstanterna på samma sätt som i uppgift (i), men använd funktionerna $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = x^2$, $f_4(x) = x^3$ och $f_5(x) = x^4$ för kalibreringen. Upprepa nu uppgift (ii) med den nya formeln.

Mer info kan hittas på hemsidan:

`http://www.math.kth.se/math/student/courses/5B1126/200405/IU2.html`

En fortsättningsintroduktion till Matlab finns också att ladda ner där.