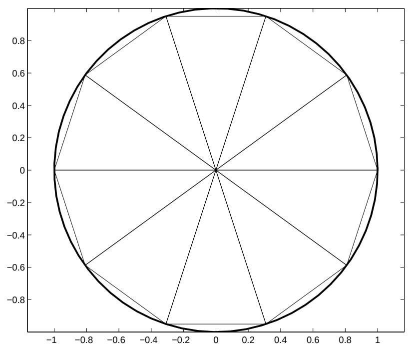
KTH
Matematik
Per Enqvist

Tentamen
i kursen 5B1126 Matematik förberedande kurs, TIMEH1, vt 2005

Skriv namn och personnummer på första sidan. Läs igenom uppgifterna noggrannt så att ni är säkra på att ni har förstått problemet. Förklara vad ni gör och rita tydliga figurer. Lämna bara in en lösning per problem, men försök gärna att lösa problemen på mer än ett sätt för att kontrollera era svar. Skriv bara på framsidan och högst en uppgift per blad. Varje uppgift bedöms med upp till 12 poäng. Ett resultat från den löpande examinationen kan tillgodoräknas istället för motsvarande uppgift. För att få ett godkänt betyg på tentamen krävs minst 6 poäng på varje uppgift.

1. Enhetscirkeln har som bekant arean π. I ett försök att bestämma π så approximerar man cirkeln genom att dela in den i 10 stycken trianglar enligt figuren.



(a) Vad blir den sammanlagda arean för de 10 trianglarna ?

(4p)

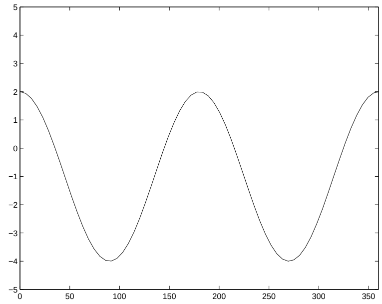
(b) Vad är längden av den kortaste sidan i trianglarna, och vad blir den sammanlagda längden för alla kortsidor i alla trianglarna ?

(4p)

(c) I a-delen bestämde vi en area som var något mindre än π, och nu ska vi bestämma en area som är något större än π. Vi gör detta genom att förlänga varje triangel i figuren så att den precis innehåller motsvarande cirkelsektor, dvs så att cirkeln precis snuddar vid den kortaste sidan i triangeln mitt på denna. Bestäm nu en överskattning av arean genom denna konstruktion.

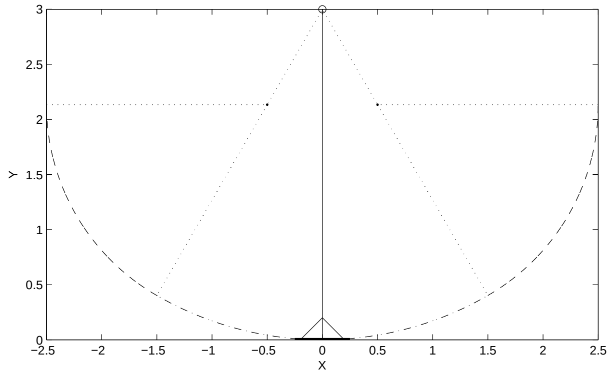
(4p)

2. (a) Bestäm amplitud, period och ekvationen för kurvan i grafen.



(3p)

(b) Kalle har köpt en ny gunga och satt upp den i sitt favoritträd. Repet till gungan är tre meter långt. När Kalle börjar gunga märker han dock att två grenar i trädet sitter ivägen och när han når en vinkel av $\pi/6$ radianer. så böjer sig repet runt grenen efter en meter av sin längd. Efter ett tags gungande funderar Kalle på hur lång trajektoria gungan har från ena ändläget till det andra, dvs hur långt som gungan har färdats ifrån det vänstra ytterläget i figuren till det högra. Hjälp Kalle att bestämma den längden.



(4p)

(c) Just som Kalle sitter och filosoferar så glider han av gungan och far iväg i tangentens riktning. Bestäm lutningen för tangenten då kurvan Kalle färdas på vid olyckan beskrivs av ekvationerna

$$x = g(v) = \frac{1}{2} + 2\sin(v), \quad y = f(v) = 3 - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(v)$$

och derivatan av y med avseende på x ges av

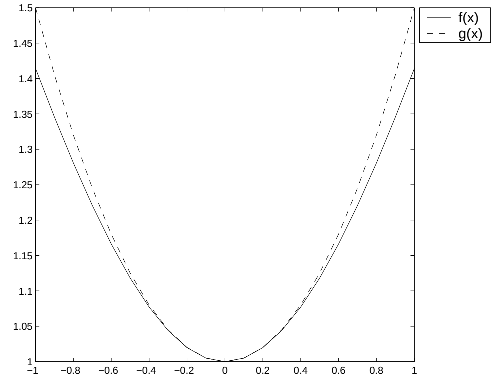
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}v}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}v}} = \frac{f'(v)}{g'(v)}$$

och vinkelparametern v vid olyckan är $\pi/3$ radianer.

(5p)

3. (a) Då x är litet så är funktionen $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ ungefär lika med andragradspolynomet

$$g(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2.$$



Visa att f och g har samma värde, derivata och andraderivata i punkten $x = 0$.

(1p)

(b) Bestäm koefficienterna i andragradspolynomet g.

(4p)

(c) Bestäm derivatan av $f(x) = e^x(\cos(x) + \sin(x))$ och visa att

$$2f(x) - f'(x) = 2\sin(x)e^x.$$

(3p)

(d) Bestäm konstanten a så att $g(x) = Ae^{ax}$ löser ekvationen

$$2g(x) - g'(x) = 0.$$

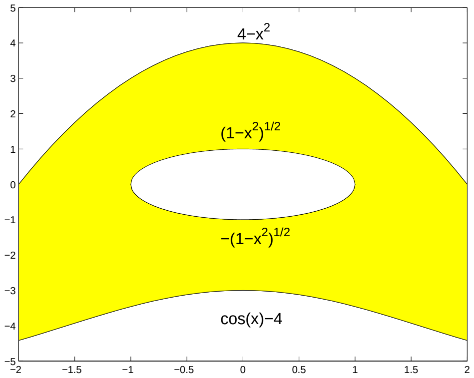
(Konstanten A bestäms först i nästa deluppgift) (2p)

(e) Visa att $h(x) = f(x) + g(x)$, där f är som i (c) och g är som i (d), uppfyller ekvationen

$$2h(x) - h'(x) = 2\sin(x)e^x,$$

och bestäm konstanten A så att $h(0) = 0$. (2p)

4. (a) Ett område avgränsas av fyra funktioner så som beskrivs i figuren.



Ställ upp ett uttryck för arean av det skuggade området i termer av integraler.

(2p)

(b) Beräkna arean av området i (a)-delen då man vet att området i mitten är en enhetscirkel och dess area är välkänd. (Eftersom axlarna har olika skala så ser enhetscirkeln inte så rund och fin ut som den brukar.) (4p)

(c) Om man vet att

$$\int_{-1}^{2} f(x)\,dx = 3,$$

och

$$\int_{-1}^{1} g(x)\,dx = 4, \qquad \int_{1}^{2} g(x)\,dx = 1,$$

bestäm konstanten α så att

$$\int_{-1}^{2} (5f(x) - \alpha g(x))\,dx = 0.$$

(2p)

(d) Bestäm konstanterna a och b så att

$$F(x) = (ax + b)e^{x/2}$$

är en primitiv funktion till $f(x) = xe^{x/2}$, och bestäm sedan integralen

$$\int_{0}^{2} xe^{x/2}\,dx.$$

(4p)