KTH
Matematik
Per Enqvist

Lösningsförslag till Tentamen i kursen 5B1126 Matematik förberedande kurs, TIMEH1, vt 2005

1. (a) Varje triangel har en vinkel vid centrum på 360/10=36 grader, och de två vidstående sidorna har längden 1. Arean för en triangel blir då
$$\frac{1 \cdot 1 \cdot \sin 36}{2} \approx 0.294\, a.e.$$
och den sammanlagda arean för de 10 trianglarna blir ca 2.94. (något mindre än cirkelns area π)

   (b) Längden av den kortaste sidan i trianglarna kan bestämmas mha cosinussatsen
$$\ell^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos(36),$$
vilket ger $\ell = 0.618$.

   Den sammanlagda längden blir 6.18. (något mindre än cirkelns omkrets 2π)

   (c) Man måste först bestämma längden på någon av sidorna i de nya trianglarna. Längden av halva yttre kortsidan är $\tan(18) \cdot 1 \approx 0.325$, och arean av en triangel är därför
$$\frac{B \cdot h}{2} = \frac{(2 \cdot 0.325) \cdot 1}{2} = 0.325.$$
Totala arean är alltså ca 3.25. (något mer än cirkelns area π)

Om man gör en liknande indelning med t.ex. 1000 trianglar får man en bättre approximation av cirkeln, prova gärna detta! (enkel modifikation av ovanstående)

2. (a) Vi ser att perioden för signalen är 180 grader, och eftersom vi har ett maxvärde för $x = 0$ så rör det sig om en en translaterad multipel av $\cos(2x)$. Eftersom skillnaden mellan max- och minvärdet är 6, så är amplituden 3. Vi ser att medelvärdet för signalen är -1 och alltså är ekvationen för signalen

$$f(x) = -1 + 3\cos(2x).$$

(b) Trajektorian ges av tre stycken cirkelbågar, två med radie 2 m och en med radie 3 m. De har alla en vinkel som är $\pi/3$. Dvs totalt har vi

$$\frac{\pi}{3} \cdot 2 + \frac{\pi}{3} \cdot 2 + \frac{\pi}{3} \cdot 3 = \frac{7\pi}{3}.$$

(c) Derivatorna ges av

$$g'(v) = 2\cos(v), \quad f'(v) = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(v)$$

och vid vinkelparametern $v = \pi/3$ radianer ges derivatan av y med avseende på x av

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} == \frac{f'(v)}{g'(v)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\pi/3)}{2\cos(\pi/3) = \frac{3}{4}}$$

3. (a) Vi har att

$$g(0) = f(0) + f'(0) \cdot 0 + \frac{1}{2} f''(0) \cdot 0^2 = f(0).$$

Vi ser att $g'(x) = f'(0) + f''(0)x$, så

$$g'(0) = f'(0) + f''(0) \cdot 0 = f'(0).$$

Slutligen $g''(x) = f''(0)$, så

$$g''(0) = f''(0)$$

(b) Vi ser att $f(0) = \sqrt{1 + 0^2} = 1$.
Eftersom $f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}$ så är $f'(0) = 0$.
Slutligen,

$$f''(x) = \frac{1 \cdot \sqrt{1 + x^2} - x \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{(\sqrt{1 + x^2})^2}$$

så $f''(0) = 1$. Dvs

$$g(x) = 1 + 0 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot x^2 = 1 + x^2/2.$$

(c) Derivatan är

$$f'(x) = e^x(\cos(x) + \sin(x)) + e^x(-\sin(x) + \cos(x)) = 2e^x \cos(x).$$

Vilket ger

$$2f(x) - f'(x) = 2e^x(\cos(x) + \sin(x)) - 2e^x \cos(x) = 2\sin(x)e^x.$$

(d) Derivatan är $g'(x) = Aae^{ax}$, och då blir

$$2g(x) - g'(x) = 2Ae^{ax} - Aae^{ax} = Ae^{ax}(2 - a)$$

vilket är noll om $a = 2$. (2p)

(e) Vi ser att

$$\begin{aligned} 2h(x) - h'(x) &= 2(f(x) + g(x)) - (f'(x) + g'(x)) \\ &= (2f(x) - f'(x)) + (2g(x) - g'(x)) \\ &= 2\sin(x)e^x + 0, \end{aligned}$$

Eftersom

$$h(x) = e^x(\cos(x) + \sin(x)) + Ae^{2x}$$

så är

$$h(0) = 1 \cdot (1 + 0) + A \cdot 1 = 1 + A$$

vilket är noll om $A = -1$. (2p)

4. (a) Vi kan uttrycka arean som

$$\int_{-2}^{-1}(4-x^2)-(\cos(x)-4)dx+\int_{1}^{2}(4-x^2)-(\cos(x)-4)dx+$$
$$\int_{-1}^{1}(4-x^2)-(1-x^2)^{1/2}dx+\int_{-1}^{1}-(1-x^2)^{1/2}-(\cos(x)-4)dx$$

(b) Arean ges av

$$\int_{-2}^{2}(4-x^2)-(\cos(x)-4)dx=\left[8x-x^3/3-\sin(x)\right]_{-2}^{2}$$

minus arean av enhetscirkeln, dvs π.

(c) Först noterar vi att

$$\int_{-1}^{2}g(x)\,dx=\int_{-1}^{1}g(x)\,dx+\int_{1}^{2}g(x)\,dx=4+1=5.$$

Genom att utnyttja integralens linjäritet får vi

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2}(5f(x)-\alpha g(x))\,dx &= 5\int_{-1}^{2}f(x)\,dx-\alpha\int_{-1}^{2}g(x)\,dx\\ &= 5\cdot 3-\alpha\cdot 5=0.\end{aligned}$$

Vilket ger att $\alpha=3$.

(d) Funktionen

$$F(x)=(ax+b)e^{x/2}$$

är en primitiv funktion till $f(x)=xe^{x/2}$ om $F'(x)=f(x)$.

$$F'(x)=(a)e^{x/2}+(ax+b)\frac{1}{2}e^{x/2}=(\frac{a}{2}x+a+\frac{b}{2})e^{x/2}$$

dvs $a=2$ och $b=-4$ medför att $F'(x)=f(x)$.

Då är

$$\int_{0}^{2}xe^{x/2}\,dx=\left[(2x-4)e^{x/2}\right]_{0}^{2}=0\cdot e^1-(-4)e^0=4.$$