5B1127 Matematik H1, vt 2006
Lösningsförslag till lappskrivning 2

1 version A.
① $n = 1$: $\quad a = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (2a + 0) = a$: sant!
② Antag att P_n är sant, och visa att i så fall gäller också P_{n+1}:

$$\begin{aligned}
&\text{vänsterledet i } P_{n+1} \text{ är} = a + (a+b) + \dots (a + (n-1)b) + (a + nb) \\
&= \{\text{ enligt } P_n\} = \frac{1}{2}n(2a + (n-1)b) + a + nb \\
&= na + \frac{1}{2}(n-1)nb + a + nb = (n+1)a + \frac{1}{2}nb(n - 1 + 2) \\
&= (n+1)a + \frac{1}{2}(n+1)nb = \frac{1}{2}(n+1)(2a + nb) \\
&= \text{ högerledet i } P_{n+1}.
\end{aligned}$$

③ P_1 sant enligt ① $\Longrightarrow$ P_2 sant enligt ② $\Longrightarrow$ P_3 sant enligt ② $\Longrightarrow \dots$

1 version B.
① $n = 1$: $\quad a = a \cdot \frac{x-1}{x-1} = a$: sant!
② Antag att P_n är sant, och visa att i så fall gäller också P_{n+1}:

$$\begin{aligned}
&\text{vänsterledet i } P_{n+1} \text{ är} = a + ax + \dots ax^{n-1} + ax^n \\
&= \{\text{ enligt } P_n\} = a\frac{x^n - 1}{x - 1} + ax^n = a\frac{x^n - 1 + x^n(x-1)}{x-1} \\
&= a\frac{x^n - 1 + x^{n+1} - x^n}{x - 1} = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} \\
&= \text{ högerledet i } P_{n+1}.
\end{aligned}$$

③ P_1 sant enligt ① $\Longrightarrow$ P_2 sant enligt ② $\Longrightarrow$ P_3 sant enligt ② $\Longrightarrow \dots$

2 version A.

$$\begin{aligned}
&[13][x] = [1] \text{ i } \mathbb{Z}_{41} \iff \text{ finns heltal } y \text{ så att } 13x = 1 + y \cdot 41 \\
&\iff 13x - 41y = 1,
\end{aligned}$$

vilket är en Diofantisk ekvation. Euklides algoritm ger att

$$\begin{aligned}
41 &= 3 \cdot 13 + 2 \\
13 &= 6 \cdot 2 + 1 \\
2 &= 2 \cdot 1 + 0,
\end{aligned}$$

varur man utläser att

$$1 = 13 - 6 \cdot 2 = 13 - 6 \cdot (41 - 3 \cdot 13) = 13 \cdot 19 - 41 \cdot 6.$$

Så $(x_p, y_p) = (19, 6)$ är en partikulärlösning. Homogena lösningen fås ur

$$13x_h - 41y_h = 0 \iff 13x_h = 41y_h \iff x_h = 41k \text{ och } y_h = 19k$$

för något heltal k. Därmed är $x = 19 + 41k$, och $[x] = 19$.

Koll: $13 \cdot 19 = 247 = 1 + 6 \cdot 41 \equiv 1 \pmod{41}$.

2 version B.

$$\begin{aligned} &[19][x] = [1] \text{ i } \mathbb{Z}_{41} \iff 19 \cdot x = 1 + y \cdot 41 \text{ för något heltal } y \\ &\iff 19x - 41y = 1, \end{aligned}$$

vilket är en Diofantisk ekvation. Euklides algoritm ger här

$$\begin{aligned} 41 &= 2 \cdot 19 + 3 \\ 19 &= 6 \cdot 3 + 1 \\ 3 &= 3 \cdot 1 + 0, \end{aligned}$$

så att

$$1 = 19 - 6 \cdot 3 = 19 - 6 \cdot (41 - 2 \cdot 19) = 19 \cdot 13 - 41 \cdot 6.$$

Därmed fås partikulärlösningen $(x_p, y_p) = (13, 6)$. Homogena lösningen fås ur $19x - 41y = 0 \iff 19x = 41y \iff x = 41k$ och $y_h = 19k$ för något heltal k. Så $x = 13 + 41k$ och $[x] = 13$.

Koll: $19 \cdot 13 = 247 = 1 + 6 \cdot 41$.