5B1127 Matematik H1, vt 2006
Lösningsförslag till lappskrivning 4

1 version A.

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e_x} & \boldsymbol{e_y} & \boldsymbol{e_z} \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2, -7, -6),$$

och

$$(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{u} = (2, -7, -6) \cdot (1, 2, -2) = 2 - 14 + 12 = 0.$$

Geometrisk tolkning: volymen av den ”låda” som $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ och $\boldsymbol{u}$ spänner upp är uppenbarligen lika med 0.

2 version A.

$$z^3 = -1 + i = 2^{1/2} \cdot e^{i(3\pi/4 + n \cdot 2\pi)} \Longrightarrow z = 2^{1/6} \cdot e^{i(\pi/4 + n \cdot 2\pi/3)},$$

där $n = 1, 2, 3$.

1 version B.

$$z = x + iy \Longrightarrow x^2 - y^2 + i \cdot 2xy = -15 - i \cdot 8 \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = -15, \\ 2xy = -8. \end{cases}$$

Andra ekvationen ger att $y = -4/x$, varpå insättning i den första ger

$$x^2 - \frac{16}{x^2} = -15 \iff (x^2)^2 + 15x^2 - 16 = 0 \iff$$
$$x^2 = -\frac{15}{2} \pm \sqrt{\frac{225 + 64}{4}} = \frac{-15 \pm 17}{2} = \begin{cases} 1, \\ -16. \end{cases}$$

Eftersom $x^2 \geq 0$ förkastas roten -16. Därmed fås att $x = \pm 1$ och $y = \mp 4$, så att $z = \pm(1 - 4i)$.

2 version B

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e_x} & \boldsymbol{e_y} & \boldsymbol{e_z} \\ 5 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = (6, -15, -12),$$

och

$$\boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = (1, -2, 3) \cdot (6, -15, -12) = 6 + 30 - 36 = 0.$$

Geometrisk tolkning: volymen av den ”låda” som spänns av $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ är uppenbarligen lika med 0.