

Institutionen för Matematik, KTH,
Olle Stormark.

**Tentamen och lösningsförslag till 5B1127 Matematik H1
för TIMEH1, 06–08–23, kl. 14.00–19.00**

- Inga hjälpmedel.
- Tillsammans med (de högst 8) bonuspoängen kan man maximalt få 40 poäng.
- *Betygsgränser:* 16-20 poäng ger betyget 3, 21-26 poäng ger betyget 4, och 27-40 poäng ger betyget 5.
- *Kompletteringstentamen* ordnas för dem som fått 14 eller 15 poäng på tentan. Skicka mail till olles@math.kth.se för mera information.

1. *Bestäm alla lösningar till ekvationen $12x = 15$ i \mathbb{Z}_{39} .* (3p)

Lösning: $12x \equiv 15 \pmod{39} \iff$ finns heltal y så att $12x = 15 + 39y \iff 4x - 13y = 5$. Nu är det klart att $1 = 13 - 3 \cdot 4$, så att $4 \cdot (-3) - 13 \cdot (-1) = 1$ och därmed är $4 \cdot (-15) - 13 \cdot (-5) = 5$. Detta visar att $x_p = -15$, $y_p = -5$ är en partikulärlösning. Den homogena ekvationen $4x - 13y = 0$ har lösningarna $x_h = 13k$, $y_h = 4k$, där k är ett godtyckligt heltal. Så allmänna lösningen till ekvationen $4x - 13y = 5$ ges av $x = 13k - 15$ och $y = 4k - 5$. Genom att sätta in $k = 2, 3, 4$ fås sedan alla lösningarna till $12x = 15$ i \mathbb{Z}_{39} :

$$x = 11, 24, 37.$$

2. *Bestäm en vektor i \mathbb{R}^3 som har längden 3 och som är vinkelrät mot vektorerna $(-3, 1, -1)$ och $(2, 0, 1)$.* (3p)

Lösning: Kryssprodukten av $\mathbf{u} = (-3, 1, -1)$ och $\mathbf{v} = (2, 0, 1)$ är vinkelrät mot \mathbf{u} och \mathbf{v} . Denna ges av

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ -3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, 1, -2),$$

som har längden $\sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$. Så för att få den rätta längden 3 multiplicerar vi med $3/\sqrt{6} = \sqrt{3/2}$, och får därmed lösningen

$$\pm \sqrt{\frac{3}{2}}(1, 1, -2).$$

3. Bestäm alla (komplexa) lösningar till ekvationen

$$z^6 + 16z^3 + 64 = 0. \quad (4p)$$

Lösning: Med $t = z^3$ fås andragradsekvationen $t^2 + 16t + 64 = 0$. Denna är ekvivalent med $(t + 8)^2 = 0$, och har därför lösningarna

$$z^3 = t = \begin{cases} -8, \\ -8. \end{cases}$$

Så det återstår att lösa ekvationen $z^3 = -8$:

$$\begin{aligned} z^3 = -8 &= 2^3 \cdot e^{i(1+2n)\pi} \iff z = 2 \cdot e^{i\pi/3 + i2\pi n/3} \\ \iff z &= \begin{cases} 2 \cdot e^{i\pi/3} = 1 + i\sqrt{3}, \\ 2 \cdot e^{i\pi} = -2, \\ 2 \cdot e^{i5\pi/3} = 1 - i\sqrt{3}. \end{cases} \end{aligned}$$

Vi får alltså de 3 dubbelrötterna $1 + i\sqrt{3}$, -2 och $1 - i\sqrt{3}$.

4. Följande uttryck är oktalt (alltså skrivet i talbasen 8). Beräkna summan och uttryck den i talbasen 7.

$$721 + 71 = ? \quad (3p)$$

Lösning: $(721)_8 + (71)_8 = 7 \cdot 8^2 + 2 \cdot 7^1 + 1 \cdot 8^0 + 7 \cdot 8^1 + 1 \cdot 8^0 = 448 + 16 + 1 + 56 + 1 = 522$. För att uttrycka 522 i talbasen 7 dividerar vi upprepade gånger med 7:

$$\begin{aligned} 522 &= 7 \cdot 74 + 4, \\ 74 &= 7 \cdot 10 + 4, \\ 10 &= 7 \cdot 1 + 3, \\ 1 &= 0 \cdot 7 + 1. \end{aligned}$$

Så

$$\begin{aligned} 522 &= 7 \cdot (7 \cdot 10 + 4) + 4 = 7^2 \cdot (7 + 3) + 7 \cdot 4 + 4 \\ &= 7^3 + 3 \cdot 7^2 + 4 \cdot 7^1 + 4 \cdot 7^0 = (1344)_7. \end{aligned}$$

5. Låt $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ och $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Hur många injektiva funktioner $f: A \rightarrow B$ finns det som uppfyller att $f(a) + f(b) = 10$? (Svaret får ges som en produkt av heltal.) (3p)

Lösning: En funktion $A \rightarrow B$ bestäms genom att välja funktionsvärde för vart och ett av elementen i A . Den blir injektiv om alla dessa funktionsvärden är olika. Vi kan välja $f(a)$ på 8 sätt (vi får nämligen inte välja $f(a) = 5$ eftersom det skulle tvinga $f(b)$ att bli 5, vilket är förbjudet då f ska vara injektiv, och vi kan inte välja $f(a) = 10$). Efter valet av $f(a)$ blir $f(b)$ bestämt till $10 - f(a)$. Därefter har vi 8 valmöjligheter för $f(c)$, därefter 7 för $f(d)$, och så vidare, tills vi kommer till $f(h)$ som kan väljas bland de 3 återstående elementen i B . Sammanlagt finns alltså

$$8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$$

olika injektiva funktioner.

6. Bestäm alla lösningar till matrisekvationen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3p)$$

Lösning: Med hjälp av Gauss-Jordan elimination ser man att

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 1 \\ 3 & -2 & 3 & | & -3 \\ -2 & 0 & -2 & | & 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{cases} x = -1/2 - z, \\ y = 3/4, \\ z = \text{godtycklig.} \end{cases}$$

7. Hur många olika följder kan man bilda av samtliga bokstäver i ordet *TENTAMEN* om de båda *T*:na aldrig får stå bredvid varandra? (Svaret får ges som en produkt av heltal.) (3p)

Lösning: *TENTAMEN* består av 8 bokstäver, varav *T*, *E* och *N* förekommer 2 gånger vardera. Totala antalet följder som kan bildas av bokstäverna i *TENTAMEN* är därför

$$\frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = 7!.$$

Antalet följder som innehåller *T*:na bredvid varandra får vi genom att betrakta *TT* som en enda symbol, och betrakta *{TT}ENAMEN* som ett "ord" med 7 bokstäver; vi får då

$$\frac{7!}{2! \cdot 2!} = \frac{7!}{4} \text{ stycken.}$$

Så det sökta antalet blir lika med

$$7! - \frac{7!}{4} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot (4 - 1) = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3^3 \cdot 2.$$

8. Avgör om matrisen $(\mathbf{AB})^4(\mathbf{BC})^3(\mathbf{A} + \mathbf{B})$ är inverterbar, där

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -6 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 6 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3p)$$

Lösning: Matrisen saknar invers om och endast om dess determinant är lika med noll. Eftersom

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ger utveckling efter 3:e raden att $\det(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = 0$. Så enligt produktsatsen för determinanter är

$$\det(\mathbf{AB})^4(\mathbf{BC})^3(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \det((\mathbf{AB})^4(\mathbf{BC})^3) \cdot \det(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = 0.$$

Alltså är matrisen inte inverterbar.

9. Låt $\mathbf{u} = (2, -1, 3)$ och $\mathbf{v} = (4, -1, 2)$ vara vektorer i \mathbb{R}^3 . Bestäm dels den ortogonala projektionen av \mathbf{u} på \mathbf{v} och dels den komponent av \mathbf{u} som är ortogonal mot \mathbf{v} . (3p)

Lösning: Projektionen av \mathbf{u} på \mathbf{v} ges av

$$\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} \mathbf{v} = \frac{8 + 1 + 6}{16 + 1 + 4} (4, -1, 2) = \frac{5}{7} (4, -1, 2).$$

Komponenten ortogonal mot \mathbf{v} är lika med

$$\mathbf{u} - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} \mathbf{v} = (2, -1, 3) - \left(\frac{20}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{10}{7} \right) = \frac{1}{7} (-6, -2, 11).$$

10. Visa att påståendena

$$P_n: \sum_{k=0}^n k \left(k + \frac{1}{3} \right) = \frac{n(n+1)^2}{3}$$

gäller för $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ (4p)

Lösning: (1) Vi visar först att P_0 gäller:

$$n = 0 \implies 0 = 0 - \text{vilket är sant.}$$

(2) Sedan visar vi att $P_n \implies P_{n+1}$:

$$\begin{aligned} \text{VL i } P_{n+1} &= \sum_{k=0}^n k \left(k + \frac{1}{3} \right) + (n+1) \left(n+1 + \frac{1}{3} \right) = \{ \text{enligt } P_n \} \\ &= \frac{n(n+1)^2}{3} + (n+1) \frac{3n+4}{3} = \frac{n+1}{3} \cdot (n(n+1) + 3n+4) \\ &= \frac{n+1}{3} \cdot (n^2 + 4n + 4) = \frac{n+1}{3} \cdot (n+2)^2 \\ &= \frac{(n+1) \cdot ((n+1) + 1)^2}{3} = \text{HL i } P_{n+1}. \end{aligned}$$

(3) Till slut får vi:

$$(1) \implies P_0 \text{ sant} \xrightarrow{(2)} P_1 \text{ sant} \xrightarrow{(2)} P_2 \text{ sant} \xrightarrow{(2)} P_3 \text{ sant} \xrightarrow{(2)} \dots,$$

det vill säga P_n gäller för $n = 0, 1, 2, 3, \dots$