

Institutionen för Matematik
KTH
Lars Filipsson

Uppgifter till räkneövningen den 14 november

5B1132 Amelia 1 för P ht 2003

Uppgifterna 1-5 kan räknas av läraren på tavlan. Övriga uppgifter ska studenterna lösa själva, individuellt eller i grupp, under handledning av läraren.

Uppgifter för läraren (max 45 minuter)

1. Bestäm MacLaurinutvecklingen av ordning 3 till funktionen $f(x) = xe^{-x}$ på två olika sätt: dels genom att derivera funktionen och använda receptet i Taylors formel, dels genom att mickla med den kända MacLaurinutvecklingen av e^x . Ange resttermen dels på Lagranges form, dels på ordo-form.
2. Bestäm ett närmevärde med 4 korrekta decimaler till $\cos \frac{1}{10}$.
3. Du får veta följande om en funktion: $f(2) = 2$, $f'(2) = 1$, $f''(2) = -2$ och $f'''(x)$ är kontinuerlig i intervallet $1 \leq x \leq 3$ och är till beloppet mindre än 4711 för alla x i intervallet. Approximera efter bästa förmåga f på det aktuella intervallet. Kan du säga något om felet i approximationen? Räkna ut gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - x}{x^4 - 16}.$$

4. Beräkna gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x + x^2) - \sin(x + x^2) + \frac{x^2}{2}}{\arctan(x + x^4) - x}$.

5. Förklara vad en asymptot är och bestäm sedan samtliga asymptoter till funktionen $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 + 7x}$.

Uppgifter för studenterna

6. Bestäm MacLaurinutvecklingen av ordning 3 till funktionen $f(x) = x \ln(2x + 1)$. Ange resttermen på valfri form.
7. Du hålls fången av den ökände Djingis Karl i Bengtsfors, som planerar att avrätta dig innan gryningen. Din advokat, som för övrigt är identisk med din gamla mattelärare, har utverkat en sista chans för dig: du blir benådad om du med papper och penna kan räkna ut ett närmevärde till $\sqrt{4,1}$ med tre korrekta decimaler. Gör det.
8. Säg att du vet att funktionen f kan deriveras tre gånger på intervallet $-2 < x < 0$ och tredjederivatans är kontinuerlig där. Säg att du dessutom vet att $f(-1) = 1$, $f'(-1) = 2$ och $f''(-1) = -1$. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + 3 - f(x)}{(x + 1)^2}.$$

9. Beräkna gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$.

10. Beräkna gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x + 3} - 3}{x - 3}$.

11. MC-gängledaren Ugly Bob har ett brinnande intresse för astronomi, men ingen miniräknare. Han tänker nu implementera sinusfunktionen i den enkla dator han byggt själv efter en byggsats som han skickat efter via Hobbex katalog. Datorn kan egentligen bara utföra de fyra räknesätten. Han vill att datorn ska kunna räkna ut $\sin x$ för alla x i intervallet $[-\pi/2, \pi/2]$ med fem korrekta decimaler. Hjälp honom!

12. Beräkna gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x^3) \arctan x^2}{x^8}$. Den som tror att L'Hôspitals regel (se AM 186-191) är så mycket enklare än MacLaurinutveckling kan gärna lösa uppgiften med hjälp av den.