Institutionen för Matematik
KTH

Lösningsförslag till
Extra Tentamen i Analytiska metoder och linjär algebra 1
för M, BD, P och T (kurskod 5B1132) samt IT (kurskod 5B1140)
Den 17 januari 2004 kl 09.00-14.00

1. För vilka värden på konstanten a saknar nedanstående ekvationssystem lösning?

$$\begin{cases} x+y-z=-1 \\ 2x+3y+z=3 \\ -x+ay+7z=1 \end{cases}$$

Lösning: Vi skriver systemet som en totalmatris och använder Gausselimination. Vi får

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ -1 & a & 7 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & a+1 & 6 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 3-3a & -5-5a \end{pmatrix}$$

och här ser vi att lösning saknas om och endast om $3-3a=0$ och $-5-5a \neq 0$ vilket är fallet om och endast om $a=1$.

Svar: Lösning saknas när $a=1$.

---

2. Vilken punkt på planet $x+2y+2z-3=0$ ligger närmast origo?

Lösning: En normal till planet är $n = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Eftersom ortsvektorn u från origo till den punkt på planet som ligger närmast origo måste vara ortogonal mot planet måste den vara en multipel av normalvektorn, dvs $u=kn$ för något tal k. Vi får alltså

$$u = \begin{pmatrix} k \\ 2k \\ 2k \end{pmatrix},$$

och om koordinaterna ska vara koordinater för en punkt på planet så måste $k + 2(2k) + 2(2k) - 3 = 0$, dvs $9k = 3$, dvs $k = 1/3$. Den punkt på planet som ligger närmast origo är alltså $(1/3, 2/3, 2/3)$.

Svar: $(1/3, 2/3, 2/3)$.

---

3. Bestäm en ekvation för tangenten till kurvan $y = \dfrac{\ln(2x^2 - x)}{1 + x^2}$ i punkten $(1, 0)$.

Lösning: Vi deriverar och får

$$y'(x) = \frac{\frac{(4x-1)(1+x^2)}{2x^2-x} - 2x\ln(2x^2 - x)}{(1 + x^2)^2},$$

vilket ger att $y'(1) = 3/2$. Det betyder att tangenten får en ekvation typ

$$y = \frac{3}{2}x + m, \qquad \text{för något tal } m$$

och om tangenten ska gå igenom punkten $(1, 0)$ så måste $m = -3/2$. Tangentens ekvation blir alltså

$$y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}.$$

Svar: $y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{3}{2}$.

---

4. Bestäm den allmänna lösningen $y(x)$ till differentialekvationen $y'' - 3y' + 2y = 4x^2$.

Lösning: Allmänna lösningen till differentialekvationen ges som $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$, där y_p är någon partikulärlösning till ekvationen och y_h är allmänna lösningen till motsvarande homogena ekvation.

Vi börjar med att söka den allmänna lösningen $y_h(x)$ till $y'' - 3y' + 2y = 0$. Den karaktäristiska ekvationen $r^2 - 3r + 2 = 0$ har lösning $r = 1$ och $r = 2$ varför $y_h(x) = Ae^x + Be^{2x}$.

Sedan ansätter vi en partikulärlösning $y_p(x) = ax^2 + bx + c$, deriverar och får $y_p' = 2ax + b$, deriverar en gång till och får $y_p'' = 2a$. Vi ser nu att vår y_p är en lösning till den i uppgiften givna differentialekvationen om och endast om $y_p'' - 3y_p' + 2y_p = 4x^2$ dvs om och endast om $2a - 3(2ax + b) + 2(ax^2 + bx + c) = 4x^2$ dvs om och endast om $a = 2$, $b = 6$ och $c = 7$. Det ger oss vår partikulärlösning $y_p = 2x^2 + 6x + 7$.

Den allmänna lösningen till vår differentialekvation är därför $y(x) = Ae^x + Be^{2x} + 2x^2 + 6x + 7$, där A och B är godtyckliga reella tal.

Svar: $y(x) = Ae^x + Be^{2x} + 2x^2 + 6x + 7$

---

5. Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1+x}{1+x^2}\,dx$.

Lösning: Vi har:

$$\begin{aligned}
\int_0^{1/2} \frac{1+x}{1+x^2}\,dx &= \int_0^{1/2} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_0^{1/2} \frac{x}{1+x^2}\,dx \\
&= \left[\arctan x + \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\right]_0^{1/2} \\
&= \arctan\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln\frac{5}{4}
\end{aligned}$$

Svar: $\arctan\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln\frac{5}{4}$

---

6. Finn, om möjligt, största värdet av funktionen $f(x) = x^2e^{-x}$ på intervallet $[-3, 3]$.

Lösning: Funktionen ges av ett elementärt uttryck som är definierat i hela intervallet och alltså är den kontinuerlig där. Eftersom dessutom intervallet är slutet och begränsat vet vi att ett största och ett minsta värde existerar och kan antas i punkter där derivatan saknas eller i punkter där derivatan är noll eller i ändpunkter till intervallet. Vi deriverar och får $f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = x(2-x)e^{-x}$ som existerar i hela intervallet. Eftersom exponentialfunktionen är skild från noll får vi att $f'(x) = 0$ om och endast om $x = 0$ eller $x = 2$. De punkter där max och min kan antas är alltså $-3, 0, 2, 3$. Vi räknar ut funktionsvärdena i dessa punkter och jämför:

$$f(-3) = 9e^3, \qquad f(0) = 0, \qquad f(2) = 4e^{-2}, \qquad f(3) = 9e^{-3}.$$

Vi ser att funktionens största värde är $9e^3$ och funktionens minsta värde är 0.

Svar: Största värdet är $9e^3$.

---

7. Bestäm $\displaystyle\int \cos\sqrt{x}\,dx$.

Lösning: Vi gör först substitutionen $t = \sqrt{x}$ och sedan integrerar vi partiellt. Vi får:

$$\begin{aligned}
\int \cos\sqrt{x}\,dx &= \{t = \sqrt{x},\ t^2 = x,\ 2tdt = dx\} \\
&= \int 2t\cos t\,dt \\
&= 2t\sin t - \int 2\sin t\,dt \\
&= 2t\sin t + 2\cos t \\
&= 2\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + 2\cos\sqrt{x}.
\end{aligned}$$

Svar: $2\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + 2\cos\sqrt{x}$