

Uppgifter på linjer och plan, komplexa tal och polynom

1. Vilken punkt på linjen $2x + 7y + 23 = 0$ ligger närmast triangeln med hörn i $(-1, 0)$, $(0, 1)$ och $(1, -2)$?
2. Lös ekvationen $z^3 - 3z^2 + 4z - 2 = 0$.
3. Du får veta att $-1 + 2i$ är ett nollställe till polynomet $z^4 + 3z^2 - 6z + 10$. Bestäm alla nollställen och skriv polynomet som en produkt av reella faktorer av grad högst 2.
4. Avståndsformeln i planet säger att avståndet från punkten (x_1, y_1) till linjen $ax + by + c = 0$ är $\frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Bevisa utan att tjuvkika i boken att denna formel är sann.
5. Tetraedern med hörn i punkterna $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$, $(2, 0, 1)$, $(-1, 2, 3)$ speglas i planet $x + 2y + z = 0$. Bestäm koordinaterna för spegelbildens hörn.
6. Lös ekvationen $z^6 = 1$ och rita in lösningarna i ett komplext talplan (lösningarna kallas de sjätte enhetsrötterna).
7. Vilken vinkel bildar rymddiagonalerna i en kub med varandra?
8. Avgör om vektorerna $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 7 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$ ligger i samma plan.

9. Om vektorerna u och v får du veta att $u \cdot v = 25$ och $|v| = 5$. Bestäm vinkeln mellan $u - v$ och v .
10. Bevisa utan att tjuvkika i boken att $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ och $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$ för alla komplexa tal z och w .
11. Du får veta att talet i är en rot till ekvationen $z^3 + (1 - 3i)z^2 - (1 - 4i)z + 5 - i = 0$. Bestäm de övriga rötterna.
12. Kapten Krok gav sina pirater order att segla till Skattön för att hämta en nergrävd skatt. De fick med sig en pergamentrulle med följande instruktioner: *Stega från galgen till det brända trädet och sedan en lika lång sträcka rakt åt vänster. Sätt ner en knif. Stega därefter från galgen till den stora vita stenen och sedan en lika lång sträcka rakt åt höger. Mitt emellan dig och knifven ligger skatten nergrävd.* När männen kommer till platsen ser de genast det brända trädet och den stora vita stenen, men galgen är borta. Efter lite planlöst grävande ger de upp och slänger pergamentrullen. När piratdrottningen Svarta Sara kommer till ön och hittar pergamentrullen lyckas hon dock utan problem finna skatten. Hur?