

Facit till
Uppgifter på linjer och plan, komplexa tal och polynom

1. Vilken punkt på linjen $2x + 7y + 23 = 0$ ligger närmast triangeln med hörn i $(-1, 0)$, $(0, 1)$ och $(1, -2)$?

Svar: $(33/53, -183/53)$.

2. Lös ekvationen $z^3 - 3z^2 + 4z - 2 = 0$.

Svar: Lösningarna är $1, 1 + i, 1 - i$.

3. Du får veta att $-1 + 2i$ är ett nollställe till polynomet $z^4 + 3z^2 - 6z + 10$. Bestäm alla nollställen och skriv polynomet som en produkt av reella faktorer av grad högst 2.

Svar: Nollställena är $-1 \pm 2i, 1 \pm i$, faktoriseringen blir $(z^2 + 2z + 5)(z^2 - 2z + 2)$.

4. Avståndsformeln i planet säger att avståndet från punkten (x_1, y_1) till linjen $ax + by + c = 0$ är $\frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Bevisa utan att tjuvkika i boken att denna formel är sann.

Svar: Tjuvkika i boken Linjär geometri och algebra.

5. Tetraedern med hörn i punkterna $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$, $(2, 0, 1)$, $(-1, 2, 3)$ speglas i planet $x + 2y + z = 0$. Bestäm koordinaterna för spegelbildens hörn.

Svar: $(2/3, -2/3, 1/3)$, $(-1/3, -5/3, -1/3)$, $(1, -2, 0)$, $(-3, -2, 1)$.

6. Lös ekvationen $z^6 = 1$ och rita in lösningarna i ett komplext talplan (lösningarna kallas de sjätte enhetsrötterna).

Svar: $e^{in\pi/3}$, $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

7. Vilken vinkel bildar rymddiagonalerna i en kub med varandra?
Svar: $\arccos 1/3$.

8. Avgör om vektorerna $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 7 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$ ligger i samma plan.

Kortfattat förslag till lösning: Vektorerna u , v , w ligger i samma plan om och endast om den parallelepiped de spänner upp har volym 0. Parallelepipedens volym fås som $u \times v \cdot w = \det \begin{pmatrix} u & v & w \end{pmatrix}$. I vårt fall blir detta

$\det \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 4 & 12 & 0 \\ -3 & 0 & 9 \end{pmatrix} = 0$. Vektorerna ligger alltså i samma plan. (Obs: uppgiften kan lösas på många andra sätt.)

9. Om vektorerna u och v får du veta att $u \cdot v = 25$ och $|v| = 5$. Bestäm vinkeln mellan $u - v$ och v .

Kortfattat förslag till lösning: Med hjälp av den givna informationen och räknereglerna för skalärprodukt får vi att

$$(u - v) \cdot v = u \cdot v - v \cdot v = u \cdot v - |v|^2 = 25 - 25 = 0.$$

Eftersom två nollskilda vektorer är ortogonala om och endast om deras skalärprodukt är noll, ser vi att den sökta vinkeln är 90 grader.

10. Bevisa utan att tjuvkika i boken att $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ och $\overline{z\bar{w}} = \bar{z}w$ för alla komplexa tal z och w .

Förslag till lösningsmetod: skriv $z = a + ib$ och $w = c + id$ och räkna ut för hand vänster led respektive höger led i de båda likheterna och se att det blir samma. Det går också att kika i boken Analytiska metoder 1, kapitel K4.

11. Du får veta att talet i är en rot till ekvationen $z^3 + (1 - 3i)z^2 - (1 - 4i)z + 5 - i = 0$. Bestäm de övriga rötterna.

Svar: $1 - i$ och $-2 + 3i$.

12. Kapten Krok gav sina pirater order att segla till Skattön för att hämta en nergrävd skatt. De fick med sig en pergamentrulle med följande instruktioner: *Stega från galgen till det brända trädet och sedan en lika lång sträcka rakt åt vänster. Sätt ner en knif. Stega därefter från galgen till den stora vita stenen och sedan en lika lång sträcka rakt åt höger. Mitt emellan dig och knifven ligger skatten nergrävd.* När männen kommer till platsen ser de genast det brända trädet och den stora vita stenen, men galgen är borta. Efter lite planlöst grävande ger de upp och slänger pergamentrullen. När piratdrottningen Svarta Sara kommer till ön och hittar pergamentrullen lyckas hon dock utan problem finna skatten. Hur?

Svar: I princip kan man tänka antingen med hjälp av vektorer i planet eller med hjälp av komplexa tal. Skattens läge är i alla fall oberoende av var galgen har stått. Kanske byggde Svarta Sara helt enkelt en galge någonstans och utgick från den. Eller också räknade hon med komplexa tal och fick följande beskrivning av vägen till skatten: Gå från den vita stenen halvvägs till det brända trädet och sedan en lika lång sträcka rakt åt vänster.