Institutionen för Matematik
KTH
Lars Filipsson

Modellkontrollskrivning

5B1132 Amelia 1 för P ht 2003

Uppgift 1 kan ge maximalt 1 poäng, uppgifterna 2 och 3 kan ge maximalt 2 poäng. Tänk på att skriva korrekt genomförda och tydligt presenterade resonemang. OBS: lösningar som inte innehåller någon text alls utan bara uträkningar ges automatiskt 0 poäng. Inga hjälpmedel.

1. Lös för alla värden på konstanten a ekvationssystemet

$$\begin{cases} -2x + y + 2z = 3 \\ ax + 2y + z = 1 \\ x + 3y - z = 4 \end{cases}$$

— **Lösning** —

Vi använder Gausselimination och får till att börja med:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 3 \\ a & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 2 & 3 \\ a & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 7 & 0 & 11 \\ 0 & 2-3a & 1+a & 1-4a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 11/7 \\ 0 & 0 & 1+a & 1-4a-(22-33a)/7 \end{pmatrix}.$$

Här ser vi att när $a = -1$ så blir sista raden en rad med nollor till vänster medan det i högra kolonnen står $-20/7$ – det betyder att ekvationssystemet saknar lösning i detta fall.

Om $a \neq -1$n så kan vi fortsätta Gausseliminationen som inleddes ovan och få:

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 11/7 \\ 0 & 0 & 1 & (5a-15)/(7+7a) \end{pmatrix}$$

ur vilket vi utläser den unika lösningen $z = (5a-15)/(7+7a)$, $y = 11/7$, $x = 4 - 33/7 + (5a-15)/(7+7a) = -20/(7+7a)$.

Svar: Om $a = -1$ saknas lösning. Om $a \neq -1$ finns unik lösning, nämligen

$$x = -20/(7+7a), \quad y = 11/7, \quad z = (5a-15)/(7+7a).$$

—

2. Bestäm inversen till matrisen $A(2A^T - 3B)$ då $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

—— Lösning: ——

Om $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ så får vi att

$$A(2A^T - 3B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -7 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

och inversen till denna matris är $\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Svar: $\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

——

3. Bestäm om möjligt talet b så att vektorerna $r = \begin{pmatrix} b \\ b \\ b+2 \end{pmatrix}$ och $s = \begin{pmatrix} b+1 \\ b+3 \\ b-3 \end{pmatrix}$ blir ortogonala.

—— Lösning: ——

Två nollskilda vektorer är ortogonala precis när deras skalärprodukt är noll. I det här fallet säger kravet $r \cdot s = 0$ att

$$\begin{pmatrix} b \\ b \\ b+2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b+1 \\ b+3 \\ b-3 \end{pmatrix} = b(b+1) + b(b+3) + (b+2)(b-3) = 0,$$

vilket ger oss andragradsekvationen $3b^2 + 3b - 6 = 0$ dvs $b^2 + b - 2 = 0$, med lösningar $b = 1$ och $b = -2$. Vi ser att båda dessa val av b gör att de aktuella vektorerna blir ortogonala.

Svar: $b = 1$ och $b = -2$ går bra.