Institutionen för Matematik
KTH
Lars Filipsson

B-uppgifter till tentan i 5B1132 Amelia 1

1. Finns det någon funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med nedanstående egenskaper?

   $f(n) = n - 1$ för alla heltal n.

   f är deriverbar och $f'(x) \geq 0$ för alla reella tal x,

   $\displaystyle\int_0^n f(x)\,dx = \frac{n^2}{2}$ för alla heltal $n \geq 5$.

Lösning: Om $f'(x) \geq 0$ för alla $x > 0$ måste f vara växande på det intervallet. Om dessutom $f(n) = n - 1$ för alla heltal n så betyder det att $f(x) \leq [x]$ (heltalsdelen av x) för alla $x > 0$. Därmed måste $\displaystyle\int_0^5 f(x)\,dx \leq 1 + 2 + 3 + 4 = 10 < 5^2/2$. En funktion som uppfyller alla de tre givna villkoren kan alltså inte finnas.
Svar: Nej.

---

2. En läskedrycksburk som rymmer 33 cl ska tillverkas i formen av en cylinder. Bottenplattan och topplattan ska göras i ett material som kostar 10 öre per kvadratcentimeter, medan resten ska göras i ett lite tunnare material som kostar 5 öre per kvadratcentimeter. Hur hög ska burken vara om man vill minimera materialkostnaden?

Lösning: Låt höjden av burken vara h och bottenplattans radie r. Arean av bottenplattan är då $r^2\pi$, arean av topplattan lika mycket, och arean av den buktiga ytan är $2\pi rh$. Eftersom volymen ska vara 33 cl, vilket är lika med 330 cm^3, får vi ett samband mellan radien och höjden; volymen $V = 330 = r^2\pi h$, vilket medför att $h = \dfrac{330}{r^2\pi}$. Den totala materialkostnaden K(r) blir därför

$$K(r) = 10 \cdot 2r^2\pi + 5 \cdot 2\pi r\frac{330}{r^2\pi} = 20r^2\pi + \frac{3300}{r},$$

där $r > 0$ ty annars är det inte frågan om någon burk. Vi ser att $\lim_{r\to 0} K(r) = \lim_{r\to\infty} K(r) = \infty$ och att $K(r)$ är deriverbar och positiv på det aktuella intervallet så ett minimum finns och antas i en punkt där derivatan är 0. Vi deriverar och får

$$K'(r) = 40r\pi - \frac{3300}{r^2}$$

vilket ger att $K'(r) = 0$ om och endast om $r^3 = 3300/40\pi$ dvs om och endast om

$$h = \frac{330}{\pi(3300/40\pi)^{2/3}}.$$

Svar: $h = \dfrac{330}{\pi(3300/40\pi)^{2/3}}$ cm (ungefär 12 cm)

---

3. Avståndet från en punkt (x_1, y_1) i planet till linjen $ax + by + c = 0$ är enligt avståndsformeln $\dfrac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Bevisa att denna formel är sann.

Lösning: Se boken.

---

4. Den vitala delen av ett vinglas har formen av den yta som uppstår då kurvan $y = \dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{x^2}{1 + (x/2)^2}}$, $0 \le x \le 2$, roterar kring x-axeln. Enheten är dm. Hur mycket rymmer glaset maximalt?

Lösnining: Volymen V av den rotationskropp som uppstår ges av

$$\begin{aligned} V = \pi \int_0^2 (y(x))^2\,dx = \pi \int_0^2 \frac{1}{4^2}\frac{x^2}{1 + (x/2)^2}\,dx &= \frac{\pi}{4}\int_0^2 \frac{1 + (x/2)^2 - 1}{1 + (x/2)^2}\,dx \\ &= \frac{\pi}{4}\int_0^2 \left(1 - \frac{1}{1 + (x/2)^2}\right)\,dx = \frac{\pi}{4}[x - 2\arctan(x/2)]_0^2 \\ &= \frac{\pi}{4}(2 - \pi/2). \end{aligned}$$

Svar: $\dfrac{\pi}{4}(2 - \pi/2)$ liter (ungefär 0,3 liter).

---

5. Tänk dig att en två meter lång cylinder vars bottenplatta har arean 1 kvadratmeter har en densitet ρ som varierar enligt formeln $\rho(x) = \left(\frac{4}{3} - \frac{x}{9}\right)^2$ ton per kubikmeter, där x är avståndet till bottenplattan. Hur mycket väger cylindern?

Lösning: Om vi delar in cylindern i smala “hockeypuckar” parallella med bottenplattan, var och en med tjocklek Δx, så har varje sådan hockeypuck volymen $1 \cdot \Delta x$ och vikten av den hockeypuck som ligger på nivån x över bottenplattan är ungefär $\left(\frac{4}{3} - \frac{x}{9}\right)^2 \Delta x$. Cylinderns totala vikt blir då ungefär lika med summan av alla dessa hockeypuckars vikter. Detta är en Riemannsumma och när puckarnas tjocklek går mot 0 får vi en följd av Riemannsummor som konvergerar mot integralen

$$\int_0^2 \left(\frac{4}{3} - \frac{x}{9}\right)^2 dx = \int_0^2 \frac{144 - 24x + x^2}{81} dx$$
$$= [(144x - 12x^2 + x^3/3)/81]_0^2 = (240 + 8/3)/81.$$

Svar= Cylindern väger $(240 + 8/3)/81$ ton, dvs ungefär 3 ton.

---

6. Ge exempel på en reellvärd funktion f med följande egenskaper:
   $f''(x)$ existerar och är kontinuerlig för alla reella tal x
   f är avtagande på intervallet $x < 0$
   $f''(x) > 0$ för alla $x < 0$
   $f'(1) = 0$
   $f(1) = -3$

Svar: Ta tex $f(x) = (x - 1)^2 - 3$.