Institutionen för Matematik
KTH
Lars Filipsson

Ledningar till Veckans uppgifter på Moment 4 nummer 9-23

5B1132 Amelia 1 för P ht 2003

Uppgift 9. Räkna ut funktionens värde i den aktuella punkten. Derivera sedan funktionen och räkna ut derivatans värde i den aktuella punkten. Konstatera sedan att andraderivatan existerar och är kontinuerlig i en omgivning till punkten, så resttermen blir av storleksordning Ordo(x^2). Gör sedan Taylorpolynomet enligt receptet högst upp på sid 165 och räkna ut gränsvärdet.

Uppgift 10. Här har man ett val. Man kan alltid derivera de funktioner som står där och använda receptet högst upp på sid 165. Men ibland går det lite snabbare om man använder redan kända utvecklingar, i a tex kan man byta ut x mot $3x$ i den redan kända utvecklingen av $\sin x$. I d kan man gångra ihop utvecklingarna som man hittade i a och b.

Uppgift 11. Samma kommentar som till föregående uppgift.

Uppgift 12. Genomgående i deluppgift a-c: byt ut funktionerna mot taylorpolynom och räkna med dessa istället. Man får inte glömma resttermerna. Exempel:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\arctan 2x+\sin 3x}{\ln(1-4x)+5x} &= \lim_{x\to 0}\frac{2x+\mathcal{O}(x^3)+3x+\mathcal{O}(x^3)}{-4x+\mathcal{O}(x^2)+5x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{5x+\mathcal{O}(x^3)}{x+\mathcal{O}(x^2)} = \lim_{x\to 0}\frac{5+\mathcal{O}(x^2)}{1+\mathcal{O}(x)} = 5.\end{aligned}$$

Deluppgift d. Använd att $\ln a - \ln b = \ln(a/b)$, räkna ut gränsvärdet av a/b och ta logaritmen av det.

Deluppgift e. Här kan man tex använda standardgränsvärdet $(1+1/x)^x$ går mot e när x går mot oändligheten. Fast man måste mickla lite och byta ut x mot något slags blä och göra nån omskrivning och till sist ta logaritmen av alltsammans.

Deluppgift f. Använd att det som står där kan skrivas som e upphöjt till logaritmen av det som står där. Sedan är det standardgränsvärde för hela slanten (efter lite omskrivning i alla fall).

Deluppgift g. Maclaurinutveckla sinus och använd sedan ett standardgränsvärde. Obs att det finns en lista över standardgränsvärden på sid 99-100 i AM 1.

Deluppgift h. Byt ut cotangens mot sinus och cosinus och maclaurinutveckla.

Uppgift 13. Denna uppgift är inte aktuell ännu. Men på sidorna 191-192 i AM1 står hur man ska göra om man ändå vill försöka.

Uppgifterna 14-23 ingår också, men integralerna spar vi till nästa vecka. För diffekvationerna gäller: se först till att de står på formen $y'' + ay' + by = g(x)$ (eller motsvarande för första och tredje ordningens ekvation). Lösningen får man då som $y_h + y_p$, där y_h är den allmänna lösningen till den differentialekvation man får då man byter ut $g(x)$ mot 0 och y_p är någon enda (utan godtyckliga konstanter) lösning till den givna ekvationen.

Den homogena ekvationens lösning y_h hittas genom att man löser karaktäristiska ekvationen $r^2 + ar + b = 0$. Här finns tre fall:

OM lösningarna till karaktäristiska ekvationen är två olika reella tal r_1 och r_2 så är $y_h = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$, där A och B är godtyckliga reella konstanter.

OM lösningarna till karaktäristiska ekvationen är ett enda reellt tal r så är $y_h = (Ax + B)e^{rx}$, där A och B är godtyckliga reella konstanter.

OM lösningarna till karaktäristiska ekvationen är två komplexa tal $\alpha \pm i\beta$ så är $y_h = e^{\alpha x}(A \cos \beta x + B \sin \beta x)$, där A och B är godtyckliga reella konstanter.

Sedan måste man hitta en partikulärlösning y_p (här behövs inga godtyckliga konstanter i lösningen, det räcker att hitta en enda lösning som funkar) och det gör man genom att systematiskt gissa att y_p är en funktion av samma typ som $g(x)$. När man gissat så deriverar man och sätter in gissningen och dess derivata och andraderivata i diffekvationen och ser vad som måste göras för att gissningen ska vara en lösning.

Exempel: 18 b. $y'' + 6y' + 9y = 27x$. Lösningen har formen $y = y_h + y_p$, där y_h är allmänna lösningen till den homogena ekvationen och y_p är någon partikulärlösning. Först söks y_h, dvs allmänna lösningen till $y'' + 6y' + 9y = 0$. Karaktäristiska ekvationen $r^2 + 6r + 9 = 0$ har lösning $r = -3$ så $y_h = (Ax + B)e^{-3x}$. Sedan söks y_p. Ansätt (dvs gissa) $y_p = cx + d$ för några tal c och d. Då är $y_p' = c$ och $y_p'' = 0$. Och $y_p'' + 6y_p' + 9y_p = 27x$ när $6c + 9(cx + d) = 27x$ vilket är uppfyllt när $c = 3$ och $d = -2$. Alltså kan vi ta $y_p = 3x - 2$. Sammanfattningsvis får vi att lösningen y till den i uppgiften givna differentialekvationen är $y = (Ax + B)e^{-3x} + 3x - 2$, där A och B är godtyckliga reella konstanter.