Institutionen för Matematik
KTH
Lars Filipsson

Ledningar till Veckans uppgifter på Moment 4 nummer 1-8

5B1132 Amelia 1 för P och T ht 2004

1. Börja med att fundera ut vad definitionsmängden är till respektive funktion: vilka x får man stoppa in? Sedan är det dags att derivera och hitta derivatans nollställen. Till sist får man studera derivatans tecken för att avgöra om man har att göra med ett min eller ett max eller ingetdera. Obs att punkter där derivata saknas och punkter som är ändpunkter till definitionsmängden också kan vara lokala min/max.
   Exempel b. $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}$ har som definitionsmängd alla x sådana att $1 \leq x \leq 3$ och inga andra (det får inte vara negativt under rottecknen) och funktionen är kontinuerlig. Derivering ger
$$f'(x) = 1/2\sqrt{x-1} - 1/2\sqrt{3-x} = \frac{\sqrt{3-x} - \sqrt{x-1}}{2\sqrt{x-1}\sqrt{3-x}}.$$
   Vi ser att $f'(x) > 0$ om $1 < x < 2$ och $f'(x) < 0$ om $2 < x < 3$ och $f'(2) = 0$. Därav följer att funktionen har ett lokalt max i $x = 2$ samt lokala min i $x = 1$ och $x = 3$.

2. Se boken (eller tänk själv)!

3. Om en funktion är kontinuerlig på ett slutet och begränsat intervall (ett intervall som innehåller sina ändpunkter) så vet man redan från början att funktionen har ett största och ett minsta värde. Annars får man klura ut på nåt annat sätt om max/min finns eller inte. I denna uppgift är alla funktioner kontinuerliga på sina respektive intervall och intervallen är slutna och begränsade så existensen av max och min är inget problem, de finns. Då kan max och min antas i punkter där derivatan är noll, i punkter där derivata saknas, i punkter som är ändpunkter på intervallet där funktionen är definierad. Så hitta alla sådana punkter och räkna ut funktionsvärdena i dem. Det största funktionsvärdet är max och det minsta är min.

   Exempel b. Om $f(x) = x + 2\ln(-4 + 6x - x^2)$ så är f kontinuerlig på intervallet $[1, 5]$ eftersom det ges av ett elementärt uttryck som är definierat i hela intervallet (ty $-4 + 6x - x^2 > 0$ där). Nu deriverar vi och får

$$f'(x) = 1 + 2\frac{6 - 2x}{-4 + 6x - x^2} = \frac{-x^2 + 2x + 8}{-4 + 6x - x^2},$$

   som existerar i hela det aktuella intervallet och blir noll när täljaren blir noll, dvs när $x = 4$. Dags att dra slutsatser. Vi vet nu att max och min finns och att de antas antingen i $x = 1$ eller $x = 4$ eller $x = 5$. Eftersom $f(1) = 1$ och $f(4) = 4 + 2\ln 4$ och $f(5) = 5$ så ser vi att funktionens minsta värde är 1 och funktionens största värde är $4 + 2\ln 4$.

4. Skriv om olikheterna på formen $f(x) \geq 0$ och sök f:s minsta värde.

   Exempel a. Olikheten är ekvivalent med $e^{-x} + x - 1 \geq 0$ så här är det lämpligt att studera funktionen $f(x) = e^{-x} + x - 1$. När ni har visat att den funktionen har ett minsta värde som är 0 så har ni också bevisat olikheten i uppgiften.

5. Bevisa, lämpligen genom att använda derivatan, att funktionen är strängt växande. Därmed är den inverterbar (dvs har invers). Obs: på grund av beloppstecknet måste man dela upp i olika fall och behandla $x < 0$, $x > 0$ och $x = 0$ separat.

6. Se det jag skrev om uppgift 3 ovan.

7. Se det jag skrev om uppgift 4 ovan.

8. Alla relevanta uträkningar är redan gjorda i uppgift 1b.