Institutionen för Matematik
KTH
Lars Filipsson

Lösningsförslag till Kontrollskrivning 5 den 5/12

5B1132 Amelia 1 för P ht 2003

Version A

1. Avgör om funktionen $f(x) = \dfrac{e^{x^2}}{\sqrt{4\sin^2 x + 3\cos^2 x}}$ är integrerbar på intervallet $[0, \pi/4]$. Obs: det finns inga krav på att integralen ska räknas ut.

Lösning: Funktionen $f(x)$ är given av ett elementärt uttryck som är definierat för alla x i det slutna och begränsade intervallet $[0, \pi/4]$. Alltså är funktionen kontinuerlig där. Det följer då att funktionen är integrerbar på intervallet.

2. Beräkna integralen $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{0} \frac{\sin x}{2 - \cos x}\, dx$.

Lösning: Vi använder variabelsubstitution, närmare bestämt gör vi substitutionen $t = \cos x$, och får:

$$
\begin{aligned}
\int_{-\pi/2}^{0} \frac{\sin x}{2 - \cos x}\, dx &= \{t = \cos x,\ dt = -\sin x dx,\ x = -\pi/2 \Leftrightarrow t = 0,\ x = 0 \Leftrightarrow t = 1\} \\
&= \int_0^1 \frac{-1}{2 - t}\, dt \\
&= [\ln(2 - t)]_0^1 \\
&= -\ln 2.
\end{aligned}
$$

Svar: $-\ln 2$

3. Bestäm arean av det område som begränsas av kurvan $y = x\sqrt{2 - x}$ och positiva x-axeln.

Lösning: Vi ser att kurvan $y = x\sqrt{2-x}$ skär x-axeln då $x = 0$ och då $x = 2$, samt ligger ovanför x-axeln om $0 < x < 2$. Vidare är uttrycket odefinierat för alla $x > 2$. Den sökta arean blir alltså

$$\begin{aligned}
\int_0^2 x\sqrt{2-x}\,dx &= \int_0^2 (-(2-x)\sqrt{2-x} + 2\sqrt{2-x})\,dx \\
&= \int_0^2 (-(2-x)^{3/2} + 2(2-x)^{1/2})\,dx \\
&= \left[\frac{2}{5}(2-x)^{5/2} - \frac{4}{3}(2-x)^{3/2}\right]_0^2 \\
&= \frac{8\sqrt{2}}{3} - \frac{8\sqrt{2}}{5} = \frac{16\sqrt{2}}{15}.
\end{aligned}$$

Svar: $\dfrac{16\sqrt{2}}{15}$