EXTRA UPPGIFTER

Analytiska metoder och linjär algebra för P

Allmänt material

1. Låt $a > -1$. Visa att $(1+a)^n \geq 1 + na$ för alla positiva heltal n.

2. Visa att $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = n(n+1)(2n+1)/6$ för alla positiva heltal n.

3. Bestäm koefficienten framför x^4 i utvecklingen av $\displaystyle\left(3x^2 - \frac{2}{3x^2}\right)^8$.

4. För vilka x gäller $|x^3 - x^2 + 2| = x^2 - x^3 - 2$?

5. Visa att $\displaystyle -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-1/\sqrt{2}}{1+1/\sqrt{2}}\right| = \ln(1+\sqrt{2})$.

Gränsvärde och kontinuitet

6. Låt $\displaystyle f(x) = \frac{2x(e^x - 1)}{\arctan x^2}$. Kan man definiera funktionen i origo så att den blir kontinuerlig där?

7. Beräkna gränsvärdet $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x \sin 2x^3}{\cos 3x^2 - 1}$.

8. Visa att ekvationen $x^3 - \cos x - e^x + 3 = x^4 + e^{-x} - 1$ har minst två rella lösningar. *(Ledning: Skriv ekvationen på formen $f(x) = 0$, konstatera att f tycks ha olika tecken på några ställen och använd satsen om mellanliggande värden)*

9. Bestäm Taylorutvecklingen av ordning 2 i punkten $x = -2$ till funktionen $f(x) = e^{2+x} - \tan \pi x$.

10. Går det att bestämma värdet på konstanten a så att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(ax - 3a) - \ln(x-2)}{1 - \cos(ax - 3a)}, & \text{då } 2 < x < 3 \\ \sin(x-3) + x^2 - 2x - 2, & \text{då } 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

blir kontinuerlig i $x = 3$?

11. Bestäm alla asymptoter till kurvan $y = (\arctan x)/x^2$.

12. Bestäm alla asymptoter till kurvan $y = \dfrac{x^2+1}{x-1}$.

Derivator

13. Visa att funktionen $f(x) = x \arctan \dfrac{1}{x}$ är växande på intervallet $x > 0$.

14. Bestäm de intervall där $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$ är monoton.

15. Visa att funktionen $f(x) = 3 \arccos x - \arccos(3x - 4x^3)$ är konstant på intervallet $(-1/2, 1/2)$ och bestäm $f(3/8)$.

16. Visa att $2x \arctan x \leq x^2 + \ln(1 + x^2)$ för alla x.

17. Bestäm värdemängden till funktionen $f(x) = \arctan \dfrac{x+1}{x-1} - \arctan x$.

18. Kan funktionen $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+3} + \dfrac{1}{2}$ anta negativa värden?

19. Antar funktionen $f(x) = x\sqrt{5-4x}$ ett största värde på intervallet $-1 \leq x \leq 1$? Ett minsta? Bestäm i så fall dessa.

20. Antar funktionen $f(x) = \arctan 3x - \arctan x$ ett största värde? Ett minsta? Bestäm i så fall dessa.

23. Bestäm värdemängden till funktionen $f(x) = x^{1/x}$, $x > 0$.

26. Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen $y'' + y' + 2y = xe^{2x}$.

27. Bestäm tangenten och normalen i punkten $(x, y) = (0, 0)$ till kurvan

$$y^3 + xy + x^3 + e^{\cos(2x+3y)} = 1.$$

28. Bestäm tangenten och normalen i punkten $(x, y) = (1, 2)$ till kurvan

$$\sqrt{x^2 + y^2 + 4} + \cos(\pi xy) = 4.$$

29. Låt $f(x) = (x + 2)\sqrt{2 - x}$. Skissera kurvan $y = f(x)$.

Integraler

32. Beräkna $\displaystyle\int \sin^3 x \, dx$.

33. Beräkna $\displaystyle\int \arctan x \, dx$.

34. Beräkna $\int \arctan \sqrt{x}\, dx$.

36. Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \frac{\tan x\, dx}{(\cos x)^2}$.

38. Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{x}{x^3-3x+2}\, dx$.

39. Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{x^2-1}{x^3-3x+2}\, dx$.

40. Beräkna arean av det ändliga område som innestängs av kurvan $y^2 = x^2\sqrt{1-x}$.

Serier

41. Avgör om serien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{\sqrt{n}(1+n)}$ är konvergent.

42. Avgör om serien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{\sqrt{n}(1+n^2)}$ är konvergent.

43. För vilka värden på konstanten a är serien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n+a}{n}\right)$ konvergent?

44. Går det att bestämma konstanten a så att serien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{a/n} - \frac{n+1}{n}\right)$ blir konvergent?

45. Går det att bestämma konstanten a så att serien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin\frac{1}{n} + \frac{a}{n}\right)$ blir konvergent?

46. Avgör om serien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right)$ är konvergent.

50. Beräkna summan av serien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{e^{2n-1}}$.

Linjär algebra

51. Låt A vara en $n \times n$-matris sådan att $\det A = 2$. Bestäm $\det 2A$.

52. Låt A vara som i föregående uppgift. Beräkna $\det(A^3 A^T A^{-1} A^{-1})$.

53. Beräkna minsta avståndet från punkten $(1,0,4)$ till planet $x - 5y + z = 1$.

53. Låt u vara ortsvektorn till punkten $(5, 1, 1)$. Dela upp u i två komposanter, varav den ena är parallell med linjen $r(t) = (1 + t, 2t, -2 + 2t)$.

54. Finn alla 2×2-matriser A sådana att $A^T = A^{-1}$.

55. Anta att de inverterbara matriserna A och B uppfyller att $\det(AB^T) = 5$. Vad kan du säga om $\det(AB)^{-1}$?

56. Skär linjerna $r(s) = (s, 2 + 3s, 4)$ och $p(t) = (t + 1, 2, 5 + t)$ någonsin varandra?

57. Bestäm ekvationen för det plan som innehåller punkten $(1, 2, 3)$ och linjen $r(s) = (s, 2 + 3s, 4)$.

58. Spegla punkten $(1, 2, 1)$ i planet $2x - 2y - z = 0$.

59. Finn ett polynom av grad 2 vars graf går genom punkterna $(1, 9)$, $(2, 16)$ och $(-1, 13)$.

60. Låt A vara en inverterbar $n \times n$-matris. Bevisa att $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.