KTH
Matematik
Lars Filipsson

**Lösningsförslag till
Modellkontrollskrivning 2**

5B1132 Amelia 1 för P och T ht 2004

Varje uppgift kan ge maximalt 2 poäng. Tänk på att skriva korrekt genomförda och tydligt presenterade resonemang. OBS: lösningar som inte innehåller någon text alls utan bara uträkningar ges automatiskt 0 poäng. Inga hjälpmedel.

1. En ljuskälla är placerad i punkten $(3, 4, -5)$ i ett visst koordinatsystem. Den skickar iväg en ljusstråle vinkelrätt mot planet $3y - 4z = 0$. I vilken punkt träffar strålen planet?

— **Lösning** —

En normalvektor till planet är $n = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$. Låt v vara ortsvektorn till punkten $(3, 4, -5)$ och u ortsvektorn till den sökta punkten. Eftersom planet går genom origo så fås ortsvektorn till den sökta punkten genom att man tar v minus v:s projektion på planets normal. Med andra ord: $u = v - v_n$. Vi använder projektionsformeln och får

$$v_n = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \right|^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \frac{32}{25} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Alltså är $u = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} - \frac{32}{25} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4/25 \\ 3/25 \end{pmatrix}$. Den sökta punktens koordinater är följaktligen $(3, 4/25, 3/25)$.

Svar: $(3, 4/25, 3/25)$,

—

2. Ekvationen $z^4 - z^3 - 5z^2 - z - 6 = 0$ har en lösning $z = i$. Lös ekvationen fullständigt!

— **Lösning:** —

Sätt $p(z) = z^4 - z^3 - 5z^2 - z - 6$. Eftersom polynomet har reella koefficienter så gäller följande: om $a+bi$ är ett nollställe så är också $a-bi$ ett nollställe. Det betyder att vår ekvationen också har lösningen $z = -i$. Faktorsatsen ger oss sedan att såväl $(z-i)$ som $(z+i)$ delar $p(z)$. Eftersom $(z-i)(z+i) = z^2+1$ så ser vi att vi kan dividera $p(z)$ med z^2+1. Polynomdivision ger att $p(z) = (z^2+1)(z^2-z-6)$ och övriga lösningar till den givna ekvationen fås som nollställen till den andra faktorn. Den vanliga lösningsformeln till andragradsekvationer ger oss dessa lösningar som $z = 3$ och $z = -2$.

Svar: Lösningarna är $z = \pm i$, $z = 3$, $z = -2$.

—

3. Lös ekvationen $z^3 = -2 + 2i$. Svara på polär form.

— **Lösning:** —

Vi går över till polär form och skriver $z = re^{it}$ och $-2+2i = \sqrt{8}e^{i3\pi/4}$. Ekvationen $z^3 = -2+2i$ övergår då i ekvationen $r^3e^{i3t} = \sqrt{8}e^{i3\pi/4}$. Här ser vi att $r^3 = \sqrt{8}$ vilket ger oss att $r = \sqrt{2}$. Vidare ser vi att $3t = 3\pi/4 + n2\pi$, för godtyckliga heltal n, vilket ger oss att $t = \pi/4 + n2\pi/3$, n heltal. Ur detta får vi nu tre olika lösningar till ekvationen:
$z_1 = \sqrt{2}e^{\pi/4}$
$z_2 = \sqrt{2}e^{11\pi/12}$
$z_3 = \sqrt{2}e^{19\pi/12}$
som är Svaret.