KTH
Matematik
Lars Filipsson

Lösning till
Kontrollskrivning 1 den 17/9 kl 11.00-12.00

5B1132 Amelia 1 för P och T ht 2003

Version B

1. Din vän Puttrick, mattestudent vid Smockholts Universitet, har fått problem. Han har två $n \times n$-matriser A och B, som båda är inverterbara, och så bildar han en ny matris C enligt formeln $C = A^{-1}BA$. Nu frågar han dig: kan man veta säkert att C är inverterbar och kan du i så fall ge en formel för hur man räknar ut C^{-1} om man känner A, B, A^{-1} och B^{-1}?

———- Lösning: ———-

Om $C = A^{-1}BA$ så är enligt räknelagarna för matriser $C^{-1} = A^{-1}B^{-1}(A^{-1})^{-1}$, dvs $C^{-1} = A^{-1}B^{-1}A$. Vi ser alltså att C måste vara inverterbar om A och B är det och inversen är $A^{-1}B^{-1}A$.

Svar: $C^{-1} = A^{-1}B^{-1}A$

———-

2. Bestäm inversen, om den finns, till matrisen $B = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

———- Lösning: ———-

Vi räknar ut $\det B$ genom utveckling längs sista kolonnen och får att $\det B = -3(2 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 2 + 0 \cdot 4 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 4 \cdot 1) = 0$. Eftersom $\det B = 0$ så saknar B invers.

Svar: Invers saknas

———-

3. Dela upp vektorn $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ i två komposantvektorer varav den ena är parallell med vektorn $u = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

———- **Lösning:** ———-

Låt v_u vara projektionen av v på u. De sökta komposanterna är då v_u och $(v - v_u)$.
Vi använder först projektionsformeln och får att

$$v_u = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right|^2} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{4+6+8}{36} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Den komposant som är parallell med u är alltså $v_u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Den andra komposanten blir då $v - v_u = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Svar: $v_u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ är den komposant som är parallell med u och den andra komposanten blir då $v - v_u = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

———-