KTH
Matematik
Lars Filipsson

Lösningsförslag till
Kontrollskrivning 2 den 8 oktober 2004

5B1132 Amelia 1 för P och T ht 2004

1. Bestäm koordinaterna för den punkt på planet $z = 2y - 2x + 1$ som ligger närmast punkten $(x, y, z) = (1, 1, 0)$ (ON-koordinater).

—— Lösning ——

En normalvektor till planet är $n = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Den punkt P på planet som ligger närmast $(1, 1, 0)$ hittar vi genom att gå från punkten $(1, 1, 0)$ längs planets normalriktning tills vi kommer till planet. Med andra ord måste koordinaterna för P vara $(1, 1, 0) + t(-2, 2, -1)$ för något reellt tal t. Villkoret att P ska ligga på planet gör att talet t kan bestämmas. Planets ekvation ger oss ju att $-t = 2(1 + 2t) - 2(1 - 2t) + 1$ dvs $t = -1/9$. Koordinaterna är alltså $(11/9, 7/9, 1/9)$. (Det går förstås lika bra att använda projektionsformeln. Ortsvektorn från origo till den sökta punkten är då $(1, 1, 0)^T - u_n$, där u är någon vektor som börjar i planet och slutar i punkten $(1, 1, 0)$.)
Svar: $(11/9, 7/9, 1/9)$.

—

2. Polynomet $p(z) = z^3 - 7z^2 + 4z - 28$ uppfyller att $p(-2i) = 0$. Faktorisera polynomet i förstagradsfaktorer.

—— Lösning: ——

Eftersom polynomet har reella koefficienter så gäller följande: om $a + bi$ är ett nollställe så är också $a - bi$ ett nollställe. Det betyder att polynomet också har nollstället $z = 2i$. Faktorsatsen ger oss sedan att såväl $(z - 2i)$ som $(z + 2i)$ delar $p(z)$. Eftersom $(z - 2i)(z + 2i) = z^2 + 4$ så ser vi att vi kan dividera $p(z)$ med $z^2 + 4$. Polynomdivision ger att $p(z)/(z^2 + 4) = (z - 7)$ och vi ser att polynomet har faktoriseringen $p(z) = (z - 2i)(z + 2i)(z - 7)$.

Svar: $p(z) = (z - 2i)(z + 2i)(z - 7)$.

—

3. Låt $z = \dfrac{(1-2i)^7}{1+2i}$. Beräkna $|z|$.

—— **Lösning:** ——

Vi har att $|1-2i| = |1+2i| = \sqrt{5}$. Det följer att

$$|z| = \left|\frac{(1-2i)^7}{1+2i}\right| = \frac{|(1-2i)^7|}{|1+2i|} = \frac{|(1-2i)|^7}{|1+2i|} = \frac{(\sqrt{5})^7}{\sqrt{5}} = 125.$$

Svar: 125.