KTH
Matematik
Lars Filipsson

Lösningsförslag till
Kontrollskrivning 2 den 8 oktober 2004

5B1132 Amelia 1 för P och T ht 2004

1. Bestäm koordinaterna för den punkt på planet $y = 2x - 2z + 1$ som ligger närmast punkten $(x, y, z) = (0, 1, 1)$ (ON-koordinater).

— Lösning —

En normalvektor till planet är $n = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Den punkt P på planet som ligger närmast $(0, 1, 1)$ hittar vi genom att gå från punkten $(0, 1, 1)$ längs planets normalriktning tills vi kommer till planet. Med andra ord måste koordinaterna för P vara $(0, 1, 1) + t(2, -1, -2)$ för något reellt tal t. Villkoret att P ska ligga på planet gör att talet t kan bestämmas: planets ekvation ger oss ju att $1-t = 2(2t)-2(1-2t)+1$ dvs $t = 2/9$. Koordinaterna är alltså $(4/9, 7/9, 5/9)$. (Det går förstås lika bra att använda projektionsformeln. Ortsvektorn från origo till den sökta punkten är då $(0, 1, 1)^T - u_n$, där u är någon vektor som börjar i planet och slutar i punkten $(0, 1, 1)$.)
Svar: $(4/9, 7/9, 5/9)$.

—

2. Polynomet $p(z) = z^3 + 4z^2 + 9z + 36$ uppfyller att $p(3i) = 0$. Faktorisera polynomet i förstagradsfaktorer.

— Lösning: —

Eftersom polynomet har reella koefficienter så gäller följande: om $a + bi$ är ett nollställe så är också $a - bi$ ett nollställe. Det betyder att polynomet också har nollstället $z = -3i$. Faktorsatsen ger oss sedan att såväl $(z - 3i)$ som $(z + 3i)$ delar $p(z)$. Eftersom $(z - 3i)(z + 3i) = z^2 + 9$ så ser vi att vi kan dividera $p(z)$ med $z^2 + 9$. Polynomdivision ger att $p(z)/(z^2 + 9) = (z + 4)$ och vi ser att polynomet har faktoriseringen $p(z) = (z - 3i)(z + 3i)(z + 4)$.

Svar: $p(z) = (z - 3i)(z + 3i)(z + 4)$.

—

3. Låt $z = \dfrac{(2+i)^7}{2-i}$. Beräkna $|z|$.

—— Lösning: ——

Vi har att $|2+i| = |2-i| = \sqrt{5}$. Det följer att

$$|z| = \left|\frac{(2+i)^7}{2-i}\right| = \frac{|(2+i)^7|}{|2-i|} = \frac{|(2+i)|^7}{|2-i|} = \frac{(\sqrt{5})^7}{\sqrt{5}} = 125.$$

Svar: 125.