KTH
Matematik
Lars Filipsson

Lösningsförslag till
Kontrollskrivning 3 den 29 oktober 2004

5B1132 Amelia 1 för P och T ht 2004

1. Beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^4 + \ln x + \sqrt{2x}}{1 + 2^x + x^3}$.

—— Lösning ——

Vi bryter ut de dominerande termerna, använder standardgränsvärden och får att

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{x^4 + \ln x + \sqrt{2x}}{1 + 2^x + 3x^3} &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^4(1 + \frac{\ln x}{x^4} + \frac{\sqrt{2x}}{x^4})}{2^x(\frac{1}{2^x} + 1 + \frac{3x^3}{2^x})} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x^4}{2^x} \cdot \frac{1 + \frac{\ln x}{x^4} + \frac{\sqrt{2x}}{x^4}}{\frac{1}{2^x} + 1 + \frac{3x^3}{2^x}} \\
&= 0 \cdot \frac{1}{1} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

——

2. Låt $f(x)$ vara den funktion som för alla $x \geq -1/2$ definieras genom:

$$
f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \sqrt{2x+1}}{x}, & x \neq 0 \\ -1, & x = 0 \end{cases}
$$

I vilka punkter är f kontinuerlig?.

—— Lösning: ——

För alla x i definitionsmängden utom 0 så ges $f(x)$ av det elementära uttrycket $\dfrac{1 - \sqrt{2x+1}}{x}$, alltså är f kontinuerlig i alla sådana punkter x. Om $x = 0$ blir det lite knepigare. Enligt definitionen av funktionen är $f(0) = -1$. Vidare är

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{2x+1}}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{2x+1}}{x} \cdot \frac{1+\sqrt{2x+1}}{1+\sqrt{2x+1}} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-2x}{x(1+\sqrt{2x+1})} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-2}{1+\sqrt{2x+1}} \\
&= -1.
\end{aligned}$$

Eftersom gränsvärdet är lika med funktionsvärdet i punkten 0 så är funktionen kontinuerlig här också. Funktionen är alltså kontinuerlig i alla $x \geq -1/2$.

Svar: Funktionen är kontinuerlig i alla punkter i definitionsmängden, dvs alla $x \geq -1/2$.

—

3. Låt $f(x) = \ln \sqrt{4x+1}$. Bestäm en ekvation för tangenten till kurvan $y = f(x)$ i origo.

—— **Lösning:** ——

Vi använder kedjeregeln (två gånger) och får

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{4x+1}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{4x+1}} \cdot 4 = \frac{2}{4x+1}.$$

Vi sätter in $x = 0$ i detta uttryck och får $f'(0) = 2$. Tangentens ekvation måste därför vara på formen $y = 2x + m$ för något tal m och eftersom linjen ska gå genom origo måste $m = 0$. Alltså blir svaret $y = 2x$.

Svar: $y = 2x$