KTH
Matematik
Lars Filipsson

Lösningsförslag till
Kontrollskrivning 3 den 29 oktober 2004

5B1132 Amelia 1 för P och T ht 2004

1. Beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to\infty} \frac{x^5 + 2\ln x + \sqrt{x}}{1 + 3^x + x^2}$.

—— Lösning ——

Vi bryter ut de dominerande termerna, använder standardgränsvärden och får att

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{x^5 + 2\ln x + \sqrt{x}}{1 + 3^x + x^2} &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^5(1 + \frac{2\ln x}{x^5} + \frac{\sqrt{x}}{x^5})}{3^x(\frac{1}{3^x} + 1 + \frac{x^2}{3^x})} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x^5}{3^x} \cdot \frac{1 + \frac{2\ln x}{x^5} + \frac{\sqrt{x}}{x^5}}{\frac{1}{3^x} + 1 + \frac{x^2}{3^x}} \\
&= 0 \cdot \frac{1}{1} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

——

2. Låt $f(x)$ vara den funktion som för alla $x \geq -1/2$ definieras genom:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1 - \sqrt{2x+1}}, & x \neq 0 \\ -1, & x = 0 \end{cases}$$

I vilka punkter är f kontinuerlig?.

—— Lösning: ——

För alla x i definitionsmängden utom 0 så ges $f(x)$ av det elementära uttrycket $\frac{x}{1 - \sqrt{2x+1}}$, alltså är f kontinuerlig i alla sådana punkter x. Om $x = 0$ blir det lite knepigare. Enligt definitionen av funktionen är $f(0) = -1$. Vidare är

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{x}{1-\sqrt{2x+1}} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x}{1-\sqrt{2x+1}} \cdot \frac{1+\sqrt{2x+1}}{1+\sqrt{2x+1}} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x(1+\sqrt{2x+1})}{-2x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1+\sqrt{2x+1}}{-2} \\
&= -1.
\end{aligned}
$$

Eftersom gränsvärdet är lika med funktionsvärdet i punkten 0 så är funktionen kontinuerlig här också. Funktionen är alltså kontinuerlig i alla $x \geq -1/2$.

Svar: Funktionen är kontinuerlig i alla punkter i definitionsmängden, dvs alla $x \geq -1/2$.

—

3. Låt $f(x) = \ln\sqrt{1+6x}$. Bestäm en ekvation för tangenten till kurvan $y = f(x)$ i origo.

— Lösning: —

Vi använder kedjeregeln (två gånger) och får

$$
f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+6x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+6x}} \cdot 6 = \frac{3}{1+6x}.
$$

Vi sätter in $x = 0$ i detta uttryck och får $f'(0) = 3$. Tangentens ekvation måste därför vara på formen $y = 3x + m$ för något tal m och eftersom linjen ska gå genom origo måste $m = 0$. Alltså blir svaret $y = 3x$.

Svar: $y = 3x$