KTH
Matematik
Lars Filipsson

Lösningsförslag till
Kontrollskrivning 4 den 19 november 2004

5B1132 Amelia 1 för P och T ht 2004

1. Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 i punkten $x_0 = 2$ till funktionen $f(x) = \sqrt{3x-5}$. Resttermen (av grad 3) kan anges på ordo-form.

—— Lösning ——

Först ser vi att $f(2) = 1$. Sedan deriverar vi och får att $f'(x) = 3/(2\sqrt{3x-5})$ vilket ger att $f'(2) = 3/2$. Därefter deriverar vi en gång till och får $f''(x) = -9(3x-5)^{-3/2}/4$, så $f''(2) = -9/4$. Vidare ser vi att högre ordningens derivator också existerar runt den aktuella punkten; därför får vi att

$$f(x) = 1 + \frac{3}{2}(x-2) - \frac{9}{8}(x-2)^2 + \mathcal{O}((x-2)^3)$$

——

2. Bestäm minsta värdet, om det finns, av funktionen $f(x) = xe^{-x^2}$.

—— Lösning: ——

Vi deriverar och får att $f'(x) = e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2} = (1-2x^2)e^{-x^2}$. Vi ser att funktionen är deriverbar för alla x och att derivatan är noll precis när $x = \pm 1/\sqrt{2}$. Eftersom värdet i $1/\sqrt{2}$ är positivt, $\lim f(x) = 0$ när $x \to \pm\infty$ och $f(-1/\sqrt{2}) = -e^{-1/2}/\sqrt{2}$, ser vi att detta är funktionens minsta värde.

——

3. Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen newline $y'' - 4y' + 4y = 12x$.

—— Lösning: ——

Först söks allmänna lösningen y_h till den homogena ekvationen. Karaktäristiska ekvationen $k^2 - 4k + 4 = 0$ har en enda lösning $k = 2$, varför $y_h = (Ax + B)e^{2x}$. Sedan ansätts en partikulärlösning $y_p = cx + d$. Vi ser att $y_p' = c$ och $y_p'' = 0$. Om vi sätter in detta i den ursprungliga differentialekvationen ser vi att y_p är en lösning precis när $c = 3$ och $d = -3$. Den allmänna lösningen till differentialekvationen i uppgiften är nu $y = y_h + y_p = (Ax + B)e^{2x} + 3x - 3$.