KTH
Matematik
Lars Filipsson

Lösningsförslag till
Kontrollskrivning 5 den 26 november 2004

5B1132 Amelia 1 för P och T ht 2004

1. Bestäm volymen av den kropp som genereras när området mellan x-axeln och kurvan $y = \dfrac{\sqrt{\sin x}}{1+\cos x}$, $0 \leq x \leq \pi/4$, roteras ett varv runt x-axeln.

—— Lösning ——

Volymen V ges som $\int \pi y^2\, dx$, dvs i det här fallet:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\pi/4} \frac{\pi \sin x\, dx}{(1+\cos x)^2} \\ &= \left[\frac{\pi}{1+\cos x} \right]_0^{\pi/4} \\ &= \frac{\pi}{1+1/\sqrt{2}} - \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi}{2} \left[\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right]. \end{aligned}$$

——

2. Beräkna arean av det ändliga område i första kvadranten som helt innesluts av kurvona $y = x\sqrt{x+2}$ och $\dfrac{4x}{\sqrt{2+x}}$.

—— Lösning: ——

Skärningspunkterna mellan kurvorna ges av $x\sqrt{x+2} = \dfrac{4x}{\sqrt{2+x}}$ med lösningar $x = 0$ och $x = 2$. Arean av området är alltså

$$\int_0^2 \frac{4x}{\sqrt{2+x}}\, dx - \int_0^2 x\sqrt{2+x}\, dx$$

Den första integralen räknas ut enligt

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \frac{4x}{\sqrt{2+x}}\,dx &= 4\int_0^2 \frac{2+x-2}{\sqrt{2+x}}\,dx \\
&= 4\int_0^2 \left(\sqrt{2+x} - \frac{2}{\sqrt{2+x}}\right) dx \\
&= 4\left[\frac{2}{3}(2+x)^{3/2} - 4\sqrt{2+x}\right]_0^2 = \\
&= \frac{-32}{3} + \frac{32\sqrt{2}}{3}.
\end{aligned}$$

Den andra fås till

$$\begin{aligned}
\int_0^2 x\sqrt{2+x}\,dx &= \left[x\frac{2}{3}(x+2)^{3/2}\right]_0^2 - \int_0^2 \frac{2}{3}(x+2)^{3/2}\,dx \\
&= \frac{32}{3} - \left[\frac{4}{15}(x+2)^{5/2}\right]_0^2 \\
&= \frac{32}{3} - \frac{4}{15}(32 - 4\sqrt{2}) \\
&= \frac{32}{15} + \frac{16\sqrt{2}}{15}.
\end{aligned}$$

Arean är alltså

$$\frac{-32}{3} + \frac{32\sqrt{2}}{3} - \frac{32}{15} - \frac{16\sqrt{2}}{15} = \frac{48\sqrt{2}}{5} - \frac{64}{5}.$$

—

3. Avgör om den generaliserade integralen $\displaystyle\int_0^\infty \frac{3\,dx}{2x+5e^x}$ är konvergent.

— Lösning: —

Integralen är generaliserad i oändligheten. Eftersom $0 \le \dfrac{3}{2x+5e^x} \le \dfrac{3}{5e^x}$ för alla positiva x har vi att

$$0 \le \int_0^\infty \frac{3\,dx}{2x+5e^x} \le \int_0^\infty \frac{3\,dx}{5e^x} = \lim_{R\to\infty}\left[\frac{3}{5}(-e^{-x})\right]_0^R = \frac{3}{5}$$

Därför är den givna integralen konvergent.