

Institutionen för Matematik  
KTH  
Lars Filipsson

**VECKANS UPPGIFTER**  
**MENY FÖR HELA MOMENT 1**

5B1132 Amelia 1 för P och T ht 2004

**Vecka 36**

1. Rita linjerna  $2x + y = 5$  och  $3x + y = 4$  i samma koordinatsystem. Finns det någon skärningspunkt?

2. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x + y = 4 \end{cases}$$

och jämför med föregående uppgift.

3. Rita linjerna  $4x + 2y = 1$  och  $6x + 3y = 2$  i samma koordinatsystem. Finns det någon skärningspunkt?

4. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} 4x + 2y = 1 \\ 6x + 3y = 2 \end{cases}$$

och jämför med föregående uppgift.

5. Rita linjerna  $2x + 3y = 4$  och  $8x + 12y = 16$  i samma koordinatsystem. Finns det någon skärningspunkt?

6. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 8x + 12y = 16 \end{cases}$$

och jämför med föregående uppgift.

7. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ 2I_1 + 5I_3 = 20 \\ 10I_2 - 5I_3 = 40 \end{cases}$$

8. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x + y + z = 9 \\ 3x + y + z = 12 \\ x + 2y + z = 8 \end{cases}$$

9. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ 7x + 3y + 2z = 2 \\ 5x + 2y + z = 1 \end{cases}$$

10. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 2 \\ 3x + 3y + 2z = -1 \\ 2x + 2y + 3z = -14 \end{cases}$$

11. För vilka värden på konstanterna  $a$  och  $b$  har nedanstående ekvationssystem exakt en lösning? Ingen lösning? Oändligt många lösningar?

$$\begin{cases} ax + 6y = 6 \\ x + by = 2 \end{cases}$$

12. Lös för alla värden på konstanten  $a$  ekvationssystemet

$$\begin{cases} -2x + y + 2z = 3 \\ ax + 2y + z = 1 \\ x + 3y - z = 4 \end{cases}$$

13. Lös ekvationssystemet

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \\ 2 & -6 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 16 \\ 2 \end{pmatrix}$$

14. För vilka värden på konstanterna  $a$  och  $b$  har nedanstående ekvationssystem exakt en lösning? Oändligt många lösningar? Ingen lösning?

$$\begin{cases} -x + 3y + 2z = -8 \\ x + z = 2 \\ 3x + 3y + az = b \end{cases}$$

15. Lös följande ekvationssystem simultant:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 5 \\ 3x + y + 2z = 7 \\ 4x + 2y + z = 9 \end{cases} \quad \text{och} \quad \begin{cases} 2x + y + z = 7 \\ 3x + y + 2z = 11 \\ 4x + 2y + z = 12 \end{cases}$$

16. Låt matriserna  $A$  och  $B$  vara definierade genom

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$$

Beräkna om möjligt matrismultiplikationerna  $AB$ ,  $BA$ ,  $A^2$ ,  $B^2$ .

17. Låt matriserna  $A$  och  $B$  vara som i föregående uppgift. Bestäm  $A^T$  och  $B^T$ .

18. Bestäm matrisen  $(A^T - 2B)A$  där  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  och  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

19. Lös matrisekvationen  $AX = A^T$  där  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

20. Bestäm alla  $2 \times 2$ -matriser  $A$  som uppfyller att  $AA^T = A^T A$ .

21. Bestäm inversen till matrisen  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ .

22. Är  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$  invers till  $\begin{pmatrix} 7 & 2 & -6 \\ -3 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ ?

23. Bestäm inverser till matriserna  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$  och  $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

24. Bestäm om möjligt inverser till matriserna  $A = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$  och  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ .

25. Bestäm inversen till matrisen  $A(2A^T - 3B)$  då  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$  och  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

26. Lös matrisekvationen  $AX = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ , då  $A = \begin{pmatrix} -3 & -11 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$ .

### Vecka 38

27. Bestäm  $\det A$  om  $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$ .

28. Om  $A$  är som i föregående uppgift, bestäm  $A^{-1}$  utan att använda Gauss-elimination. Hur kan du kontrollera resultatet?

29. Beräkna  $\det \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 9 \end{pmatrix}$ .

30. För vilka värden på konstanten  $a$  har ekvationssystemet  $Ax = b$  exakt en lösning för varje högerled  $b$ , om  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & a & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ? Du behöver inte lösa systemet.

31. Beräkna  $\det \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  och avgör om matrisen är inverterbar eller inte.

32. Låt  $A$  vara matrisen i föregående uppgift och beräkna  $\det(A^2 A^T A^{-1})$ .

33. Punkten  $P$  delar sträckan mellan punkterna  $(1, 3)$  och  $(4, -1)$  i två lika långa delar. Bestäm punkten  $P$ . Vad är ekvationen för linjen som går genom dessa punkter? Bestäm en vektor som är ortogonal mot linjen.

34. Punkterna  $P$  och  $Q$  delar sträckan mellan punkterna  $(1, 4, 2)$  och  $(4, 1, 5)$  i tre lika delar. Bestäm  $P$  och  $Q$ .

35. Bestäm om möjligt talet  $a$  så att vektorerna  $u = (a, 2, a + 2)$  och  $v = (a + 1, a + 3, 6)$  blir parallella.

36. Bestäm om möjligt talet  $b$  så att vektorerna  $r = (b, b, b + 2)$  och  $s = (b + 1, b + 3, b - 3)$  blir ortogonala.

37. Bestäm projektionen och dess längd av  $(1, 2)$  på  $(5, 3)$ . Rita figur och kolla att svaret verkar rimligt!

38. Bestäm projektionen och dess längd av  $(5, 3, 2)$  på  $(2, 2, 1)$ .

39. Uppdela vektorn  $(3, 2, -1)$  i två vinkelräta komponenter av vilka den ena är parallell med vektorn  $(2, 1, 2)$ .
40. Beräkna  $u \cdot v$  och  $u \times v$  om  $u = (1, 2, 3)$  och  $v = (1, 1, 2)$ .
41. Kraften  $F = (9, 4, 5)$  påverkar en kropp belägen i punkten  $P = (2, 0, 0)$ . Kroppen rör sig rätlinjigt mot punkten  $Q = (3, 2, 2)$ . Hur stor är kraftens projektion i vägens riktning? Hur stort arbete uträttas om kroppen flyttas hela vägen från  $P$  till  $Q$ ?
42. En tetraeder har sina fyra hörn i punkterna  $(1, 1, 2)$ ,  $(2, 1, 0)$ ,  $(0, 1, 1)$  och  $(1, 0, 1)$ . Beräkna dess volym.