

VECKANS UPPGIFTER
MENY FÖR HELA MOMENT 3

5B1132 AMELIA 1 FR P OCH T HT 2004

Uppgifter till Vecka 42

1. Förklara hur ett induktionsbevis fungerar.
2. Bevisa att $4^n - 1$ är jämnt delbart med 3 för $n = 1, 2, 3, \dots$
3. Bevisa att $11^n - 1$ är jämnt delbart med 5 för $n = 1, 2, 3, \dots$
4. Bevisa att $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \dots + n(3n + 1) = n(n + 1)^2$ för $n = 1, 2, 3, \dots$
5. Förklara varför sannolikheten att en slumpvis vald lottorad har 7 rätt är precis $\frac{1}{\binom{35}{7}}$.
6. Beräkna
 - a. $\binom{71}{43} - \binom{71}{28}$
 - b. $\binom{9}{0} + \binom{9}{1} + \binom{9}{2} + \dots + \binom{9}{9}$
7. Utveckla
 - a. $(2x - y)^5$
 - b. $\left(x^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{x}\right)^4$
8. Bestäm koefficienten vid x^3 i utvecklingen av $\left(x + \frac{\sqrt{2}}{x}\right)^7$.
- 9*. Man vet att utvecklingen av $\left(\sqrt{x} + \frac{2}{x^2}\right)^n$ innehåller termen $14x$. Bestäm n .
10. Bestäm inversfunktionen $f^{-1}(x)$, om den finns, till de funktioner $f(x)$ som anges nedan. Bestäm definitionsmängd och värdemängd till f och f^{-1} .
 - a. $f(x) = \frac{x + 2}{x + 3}$
 - b. $f(x) = \frac{x^2}{1 + 2x}$
11. Visa att funktionen $f(x) = 2x + x^{17}$ har en invers f^{-1} . Beräkna $f(1)$ och $f^{-1}(3)$.

12*. Beräkna exakt (svaret får inte innehålla trigonometriska eller cyklometriska funktioner):

$$\begin{array}{ll} \text{a. } \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) & \text{b. } \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \arcsin\frac{-1}{2} \\ \text{c. } \sin\arcsin\frac{3}{5} & \text{d. } \cos\arcsin\frac{1}{4} \\ \text{e. } \arcsin\sin\frac{-\pi}{9} & \text{f. } \arcsin\sin\frac{7\pi}{9} \\ \text{g. } \sin\left(2\arcsin\frac{1}{3}\right) & \text{h. } \sin\left(\arcsin\frac{1}{3} + \arcsin\frac{2}{3}\right) \end{array}$$

13. Förklara varför $\sin\arcsin x$ alltid är lika med x medan $\arcsin\sin x$ *inte* alltid är lika med x . Hur går det ihop med påståendet att \arcsin är invers till \sin ?

14*. Beräkna exakt (svaret får inte innehålla trigonometriska eller cyklometriska funktioner):

$$\begin{array}{ll} \text{a. } \sin\arccos\frac{1}{3} & \text{b. } \cos\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}} + \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ \text{c. } \tan\arccos\frac{1}{3} & \text{d. } \sin\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + \arccos\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \end{array}$$

15*. Beräkna exakt (svaren får inte innehålla trigonometriska eller cyklometriska funktioner):

$$\text{a. } \arccos\cos\frac{-\pi}{9} \qquad \text{b. } \arccos\cos\frac{7\pi}{9}$$

16*. Verifiera att

$$\text{a. } \arcsin\frac{13}{14} + \arccos\frac{1}{7} = \frac{5\pi}{6} \qquad \text{b. } \arcsin\frac{1}{7} + \arccos\frac{13}{14} = \frac{\pi}{6}$$

Uppgifter till Vecka 43

17. Visa att $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$.

18. Låt $f(x) = \sqrt{x+1}$ och $g(x) = x^2 - 1$. Bestäm de sammansatta funktionerna $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ och $g \circ g$.

19. Beräkna följande gränsvärden:

$$\text{a. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} \qquad \text{b. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x + 2}$$

c. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 3x^2 + 4x + 5}{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}$

d. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^{+1} + 3x^{+2}}{4x^{+3} + 3x^{+4}}$

e. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+1}}$

f. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 1} \right)$

20. Beräkna följande gränsvärden:

a. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + x - 2}$

b. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + 4x^2}}{3x + 2}$

c. $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan \frac{x}{x + 1}$

d. $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan \frac{x^2}{x + 1}$

e. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2}$

f. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3x+2} - 2}{\sqrt{x-2}}$

21. Beräkna högergränsvärde, vänstergränsvärde och gränsvärde i punkten $x = 3$ för funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3}, & \text{då } x < 3 \\ \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 4x + 3}, & \text{då } x > 3 \end{cases}$$

22. Beräkna högergränsvärde, vänstergränsvärde och gränsvärde i punkten $x = 3$ för funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3}, & \text{då } x < 3 \\ \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 5x + 6}, & \text{då } x > 3 \end{cases}$$

23. Bestäm värdet på konstanten a så att $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + a}{x - 1}$ är ändligt och beräkna gränsvärdet.

24. Beräkna följande gränsvärden:

a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 4x}$

b. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4 \sin(x - 1)}{3(x^2 - 1)}$

c. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln(1 + 3x) - \ln(1 + x))$

d. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + \ln \sqrt{x}}{1 + e^x}$

e. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{7 + 3x}{1 + 3x} \right)^x$

f. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7 + 3x}{1 + 3x} \right)^x$

25. Kan funktionen f definieras i punkten $x = 1$ så att f blir kontinuerlig där?

$$\text{a. } f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 1} \qquad \text{b. } f(x) = \frac{3 \sin(x - 1)}{2(x^2 - 1)}$$

$$\text{c. } f(x) = \arctan \frac{1}{(x - 1)^2} \qquad \text{d. } f(x) = \arctan \frac{1}{x^2 - 1}$$

26. Visa att ekvationen $x^6 + 3x + 1 = 0$ har minst en reell lösning.

27. Visa att kurvorna $y = x^3 - x^2 + 2x + 3$ och $y = x^4 + x^3 - 2x + 4$ skär varandra i minst en punkt.

Uppgifter till Vecka 44

28. Beräkna derivatorna till följande funktioner och förenkla så långt som möjligt::

$$\begin{array}{ll} \text{a. } \frac{4x + 5}{2x + 3} & \text{b. } \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} \\ \text{c. } (\sin x + \cos x) \sin x & \text{d. } 2\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 + 2x} \\ \text{e. } (1 + 2x)^9 & \text{f. } \sin^9 x \\ \text{g. } \sin^9 2x & \text{h. } (x - x^2)e^{-x} \\ \text{i. } (2x + 1)^3(1 - x)^4 & \text{j. } \ln \sin(2x + 1) \\ \text{k. } \arctan \sqrt{2x - 1} & \text{l. } \arcsin \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \end{array}$$

29. Bestäm ekvationen för tangenten och ekvationen för normalen till kurvan

$$\text{a. } y = (1 - x)^9(2x - 3)^8 \text{ i punkten } (2, -1).$$

$$\text{b. } y = \frac{(1 - x)^8}{(2x - 3)^9} \text{ i punkten } (2, 1).$$

30. Beräkna derivatorna till följande funktioner och förenkla så långt som möjligt:

$$\begin{array}{ll} \text{a. } \cos^2 \frac{1}{x} & \text{b. } \ln \sqrt{\tan 2x} \\ \text{c. } x^{\sin x} & \text{d. } \arctan \frac{1}{\sqrt{x}} \\ \text{e. } 2 \arccos \frac{2 - x}{2} - \sqrt{4x - x^2} & \text{f. } x^3 e^{-x} \sqrt{x - x^2} \end{array}$$

VECKANS UPPGIFTER MENY FÖR HELA MOMENT 3

31. Beräkna derivatorna $\frac{dy}{dx}$ och $\frac{d^2y}{dx^2}$ uttryckta i x och y om funktionen $y(x)$ definieras genom:

a. $x^3y^3 + xy = 1$

b. $\frac{x}{y} + \frac{y^3}{x^3} = 1$

32. Bestäm ekvationen för tangenten och normalen till kurvan $x^3 - xy + y^3 = 7$ i punkten $(2, 1)$.

33. Beräkna höger- och vänsterderivatorna i $x = 0$ till funktionen $f(x) = |x| \cos x$.

34. Förklara varför man kan använda derivatan av en funktion för att hitta lokala extrempunkter till funktionen.

35. Bestäm alla lokala extrempunkter (och deras typ) till följande funktioner:

a. $f(x) = 4 \arctan x + \ln(1 + x^2)$

b. $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}$

c. $f(x) = x + \arctan(1 - 2x)$

d. $f(x) = x + \ln(2 - 2x + x^2)$

e. $f(x) = 4x + 5 \ln(2 - 2x + x^2)$

36. Förklara varför man kan använda derivatan av en funktion för att avgöra om funktionen själv är växande eller avtagande på ett intervall.

37. Bestäm följande funktioners största och minsta värde.

a. $2x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x, \quad 0 \leq x \leq 1$

b. $x + 2 \ln(-4 + 6x - x^2), \quad 1 \leq x \leq 5$

c. $4\sqrt{1-x^2} + 3x$

d. $x^2 - 4|x-1| - 2x, \quad 0 \leq x \leq 4$

38. Visa att följande olikheter är sanna:

a. $e^{-x} \geq 1 - x, \quad \text{för alla } x$

b. $\ln(1 + 2x) \geq \frac{3x}{x+2}, \quad \text{för } x \geq 0$

39. Visa att funktionen $f(x) = x\sqrt{1+|x|}$ är inverterbar.

40. Bestäm om möjligt största och minsta värde till följande funktioner:

a. $f(x) = \ln(x+1) - 2 \arctan \sqrt{x}$

b. $g(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 7, & \text{om } 1 \leq x \leq 3 \\ x^2 - 13x + 37, & \text{om } 3 \leq x \leq 8 \end{cases}$

41. Visa att olikheten $\sin x + \cos x \leq 1 + 2x$ är sann för alla $x \geq 0$.

42. Bestäm definitionsmängd och värdemängd till funktionen $\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}$.