VECKANS UPPGIFTER
MENY FÖR HELA MOMENT 4

5B1132 Amelia 1 för P och T ht 2004

Uppgifter till Vecka 45

0. Förklara varför man kan använda derivatan till en funktion för att hitta lokala extrempunkter till funktionen.

1. Bestäm alla lokala extrempunkter (och deras typ) till följande funktioner:

a. $f(x) = 4 \arctan x + \ln(1 + x^2)$

b. $f(x) = \sqrt{x - 1} + \sqrt{3 - x}$

c. $f(x) = x + \arctan(1 - 2x)$

d. $f(x) = x + \ln(2 - 2x + x^2)$

e. $f(x) = 4x + 5 \ln(2 - 2x + x^2)$

2. Förklara varför man kan använda derivatan av en funktion för att avgöra om funktionen själv är växande eller avtagande på ett intervall.

3. Bestäm följande funktioners största och minsta värde.

a. $2x\sqrt{1 - x^2} + \arcsin x, \qquad 0 \le x \le 1$

b. $x + 2 \ln(-4 + 6x - x^2), \qquad 1 \le x \le 5$

c. $4\sqrt{1 - x^2} + 3x$

d. $x^2 - 4|x - 1| - 2x, \qquad 0 \le x \le 4$

4. Visa att följande oliheter är sanna:

a. $e^{-x} \ge 1 - x, \qquad$ för alla x

b. $\ln(1 + 2x) \ge \dfrac{3x}{x + 2}, \qquad$ för $x \ge 0$

5. Visa att funktionen $f(x) = x\sqrt{1 + |x|}$ är inverterbar.

6. Bestäm om möjligt största och minsta värde till följande funktioner:

a. $f(x) = \ln(x+1) - 2\arctan\sqrt{x}$

b. $g(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 7, & \text{om } 1 \leq x \leq 3 \\ x^2 - 13x + 37, & \text{om } 3 \leq x \leq 8 \end{cases}$

7. Visa att olikheten $\sin x + \cos x \leq 1 + 2x$ är sann för alla $x \geq 0$.

8. Bestäm definitionsmängd och värdemängd till funktionen $\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}$.

9. Bestäm MacLaurinutvecklingen av ordning 1 till funktionen $f(x) = \sqrt{3x+1}$ och använd resultatet för att bestämma $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{3x+1}-1}{x}$.

10. Bestäm MacLaurinutvecklingen av ordning 3 till följande funktioner (resttermen ges på ordoform:

a. $f(x) = \sin 3x$

b. $f(x) = \ln(1+2x)$

c. $f(x) = \sqrt{1+2x}$

d. $\ln(1+2x)\sin 3x$ (använd a och b)

11. Bestäm Taylorutvecklingen av ordning 2 till följande funktioner i de angivna punkterna (resstermen ges på ordoform):

a. $f(x) = \dfrac{1}{1+2x}$, kring $x = 0$.

b. $f(x) = \dfrac{1}{1+2x}$, kring $x = -1$.

c. $f(x) = 2 + 3x + 4x^2 + 5x^3$, kring $x = 0$.

d. $f(x) = 2 + 3x + 4x^2 + 5x^3$, kring $x = 1$.

Uppgifter till Vecka 46

12. Beräkna följande gränsvärden:

a. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan 2x + \sin 3x}{\ln(1-4x) + 5x}$

b. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 2x - 2\sin 3x}{1 - e^{2x}}$

c. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 2x - e^{3x}}{e^{-x} - 1}$

d. $\lim\limits_{x\to\infty} (2\ln(3+4x^5) - 5\ln(4+3x^2))$ (skriv på formen ln(bråk))

e. $\lim_{x\to\infty} x \ln \frac{x}{x+1}$ (sätt $x = 1/t$)

f. $\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$ (Använd att $a^b = e^{b\ln a}$)

g. $\lim_{x\to 0^+} \sin 2x \ln x$

h. $\lim_{x\to 0^+} \cot 3x \ln(1+6x)$

13. Bestäm eventuella asymptoter till kurvorna:

a. $y = \sqrt{x^4 + 6x^2 + 1} - x^2$ b. $y = \frac{(2x+1)\arctan 4x}{x+1}$

14. Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen

a. $y'' - y' - 2y = 0$

b. $y'' - 6y' + 9y = 0$

c. $y'' - 6y' + 13y = 0$

d. $y'' + 4y = 0$

15. Bestäm den lösning till $y'' - y' - 2y = 0$ som uppfyller att $y(0) = 2$ och $y'(0) = 3$.

16. Bestäm den lösning till $y'' + 2y' + 5y = 0$ som uppfyller att $y(0) = 0$ och $y'(0) = 1$

Uppgifter till Vecka 47

17. Lektor Hektor Sektor börjar dagen med en kopp kaffe ur kaffeautomaten på matematiska institutionen. När kaffet kommer ut ur automaten håller det temperaturen 92 grader Celsius. Sedan svalnar det med en takt som är proportionell mot skillnaden mellan kaffets temperatur och rumstemperaturen, som på matteinstitutionen alltid är precis 22 grader. Efter 1 minut är kaffets temperatur 88 grader. Hur länge måste lektorn vänta innan han kan börja dricka sitt kaffe, om han inte vill dricka kaffe som är varmare än 60 grader?

18. Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen

a. $y'' - y' - 2y = 2x + 1$

b. $y'' + 6y' + 9y = 27x$

c. $y'' - y' = 2x + 1$

d. $y'' - y' - 2y = 4e^{3x}$

e. $y' - 2y = 4xe^{-x} - y''$

f. $3y'' + 3y = 6\cos x$

19. Bestäm den lösning till $y'' - y' - 2y = 2x + 1$ som uppfyller att $y(0) = 2$ och $y'(0) = 3$ (använd 18.a).

20. Bestäm den lösning till $y'' + 4y = 24\sin 4x$ som uppfyller att $y(0) = 1$ och $y'(0) = 0$.

21. 100 kg salt löses upp i 500 liter vatten i en tank. Sedan pumpas en saltlösning innehållande 0,1 kg salt per liter in i tanken med en takt av 10 liter i minuten, och samtidigt pumpas den väl blandade lösningen ut i samma takt. Sätt upp en matematisk modell för detta förlopp och bestäm en funktion som anger mängden salt i tanken efter t minuter.

22. Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen

a. $y'' + y' - 2y = 40\sin x\cos x$ (Använd att $\sin 2x = 2\sin x\cos x$)

b. $4x + 10\cos x - 2y = y'' - 3y'$

c. $y''' + 3y'' - y' - 3y = 9x$

d. $-y'' + y''' - y = e^{-x} - y'$

23. Bestäm den lösning till differentialekvationen $8xe^{-x} + 4y = 2y'' + 2y'$ som uppfyller att $y(0) = 3$ och $y'(0) = 2$.

24. Är funktionen $\dfrac{e^x}{x}$ integrerbar på intervallet $[1, 2]$? Om nej, varför inte? Om ja, beräkna exakt eller approximativt integralen

$$\int_1^2 \frac{e^x}{x}\,dx.$$

25. Beräkna, exakt eller approximativt, den area som begränsas av x-axeln, linjen $x = 0$, linjen $x = 1$ och kurvan $y = e^{x^2}$.

26. Beräkna följande integraler:

a. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-3x}}\,dx$

b. $\displaystyle\int_0^1 (1-2x)^{100}\,dx$

c. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx$

d. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx$

e. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{2+\cos x}\,dx$

f. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{2x+1}{x^2+1}\,dx$

g. $\displaystyle\int_1^{5} |x-2|\,dx$

h. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} (\cos^2 x - \sin^2 x)\,dx$

27. Beräkna arean av det ändliga område som begränsas av

a. kurvan $y = x - \sqrt{x}$ och x-axeln.

b. kurvan $y = (x-3)\sqrt{4-x}$ och x-axeln.

c. kurvorna $y = \sqrt{2-x}$ och $y = x\sqrt{2-x}$.