

**VECKANS UPPGIFTER**  
**MENY FÖR HELA MOMENT 5**

5B1132 AMELIA 1 FÖR P OCH T HT 2004

**Uppgifter till Vecka 48**

1. Är funktionen  $\frac{e^x}{x}$  integrerbar på intervallet  $[1, 2]$ ? Om nej, varför inte? Om ja, beräkna exakt eller approximativt integralen

$$\int_1^2 \frac{e^x}{x} dx.$$

2. Beräkna, exakt eller approximativt, den area som begränsas av  $x$ -axeln, linjen  $x = 0$ , linjen  $x = 1$  och kurvan  $y = e^{x^2}$ .

3. Beräkna följande integraler:

a.  $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-3x}} dx$

b.  $\int_0^1 (1-2x)^{100} dx$

c.  $\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^2} dx$

d.  $\int_{-1}^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx$

e.  $\int_0^\pi \frac{\sin x}{2+\cos x} dx$

f.  $\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+1} dx$

g.  $\int_1^5 |x-2| dx$

h.  $\int_0^{\pi/4} (\cos^2 x - \sin^2 x) dx$

4. Beräkna arean av det ändliga område som begränsas av

a. kurvan  $y = x - \sqrt{x}$  och  $x$ -axeln.

b. kurvan  $y = (x-3)\sqrt{4-x}$  och  $x$ -axeln.

c. kurvorna  $y = \sqrt{2-x}$  och  $y = x\sqrt{2-x}$ .

5. Beräkna följande integraler:

a.  $\int_{-1}^1 (1-2x)e^{-2x} dx$

b.  $\int_0^{2\pi} x^2 \cos x dx$

c.  $\int_0^1 \ln(x+1) dx$

d.  $\int_0^1 x \ln(x+1) dx$

e.  $\int_0^1 \ln(x^2+1) dx$

f.  $\int_0^1 x \arctan x dx$

6. Beräkna följande integraler:

a.  $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4+x^2}} dx$

b.  $\int_0^{1/2} \frac{1}{1+4x^2} dx$

c.  $\int_0^1 \frac{1}{x^2+3x+2} dx$

d.  $\int_0^5 \frac{x}{x^2+4x+3} dx$

7. Beräkna arean av det ändliga område som begränsas av kurvorna  $y = \frac{5}{9-x^2}$  och  $y = \frac{8}{4+x^2}$ .

8. Beräkna följande integraler:

a.  $\int_4^5 \frac{3x-7}{x^2-5x+6} dx$

b.  $\int_4^5 \frac{3x^2-7x-4}{(x-3)(x-2)} dx$

c.  $\int_0^1 \frac{x^2-10x+11}{(x^2+1)(x-3)} dx$

d.  $\int_3^4 \frac{x^2-x-1}{x^2-3x+2} dx$

e.  $\int_2^4 \frac{1}{x^2-4x+8} dx$

f.  $\int_1^2 \frac{1}{(1+x^2)x^2} dx$

9. Beräkna följande integraler:

$$\text{a. } \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{4 - \sin^2 x} dx \qquad \text{b. } \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin x + \sin^2 x} dx$$

$$\text{c. } \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4 - 3x^2}} dx \qquad \text{d. } \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}} dx$$

10. Beräkna arean av det område som begränsas av

a. kurvan  $y = x\sqrt{1 - x^2}$  och  $x$ -axeln.

b. kurvan  $y^2 = x^2 - x^3$ .

c. kurvorna  $y = \sqrt{1 - 4x^2}$  och  $y = \sqrt{1 - 2x}$ .

### Uppgifter till Vecka 49

11. Beräkna följande integraler:

$$\text{a. } \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1 + 16 \sin^2 x} dx \qquad \text{b. } \int_0^{\pi/4} \frac{\tan x}{1 + \cos^2 x} dx$$

$$\text{c. } \int_0^{\pi/6} \frac{\cos 2x}{\cos^4 x - \sin^4 x} dx$$

12. Beräkna medelvärdet av funktionen  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$  på intervallet  $0 \leq x \leq 3$ .

13. Beräkna derivatan  $\frac{dF}{dx}$  då

$$\text{a. } F(x) = \int_0^x \sin t^2 dt \qquad \text{b. } F(x) = \int_{2x}^{3x} \sin t^2 dt$$

14. Beräkna följande generaliserade integraler:

$$\text{a. } \int_0^{\infty} \frac{1}{4 + x^2} dx \qquad \text{b. } \int_1^{\infty} \frac{1}{(1 + x^2)x^2} dx$$

$$\text{c. } \int_1^{\infty} \frac{1 + 5x^2}{(1 + x^2)x^2} dx \qquad \text{d. } \int_1^{\infty} \frac{2x + 1}{(x + 1)^2 x^2} dx$$

15. Beräkna arean av det område som begränsas av kurvan  $y = \frac{1}{(1 + \sqrt{x})^2 \sqrt{x}}$  och koordinataxlarna.

16. Ange ekvationerna för nedanstående kurvor på polär form

a.  $x + 2y = 3$

b.  $xy = 2$

c.  $2x^2 + 3y^2 = 4$

17. Ange ekvationer för tangenten och normalen till kurvan

a.  $7\sqrt{x+2y} - xy^2 = 12$  i punkten  $(2, 1)$ .

b.  $x \sin y + y \cos x = 2x - y$  i punkten  $(0, 0)$ .

c.  $(x^2 + y^2)x - 2y^2 = 0$  i punkten  $(1, 1)$ .

d.  $x = 2t + \ln t$ ,  $y = t + 2\sqrt{t}$  i den punkt som svarar mot  $t = 1$ .

18. Beräkna arean av det ändliga område som begränsas av kurvan

a.  $y^2 = x^2(1 - x^2)$ .

b.  $x = t(1 - t^2)$ ,  $y = \ln(1 + t^2)$ ,  $-1 \leq t \leq 1$ .

19. Beräkna arean av det ändliga område som i första kvadranten begränsas av linjen  $y = 5x$  och kurvan  $y = x\sqrt{16 + 9x^2}$ .

20. Beräkna följande kurvors längd.

a.  $y = \ln(1 - x^2)$ ,  $-1/2 \leq x \leq 1/2$  (obs att  $x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2$ ).

b.  $y = \frac{1}{2} \arcsin(2x - 1) - \sqrt{x - x^2}$ ,  $0 \leq x \leq 1$ .

c.  $x = \cos^3 t$ ,  $y = \sin^3 t$ ,  $0 \leq t \leq \pi$ .

21. Beräkna volymen av den kropp som uppstår vid rotation av området

a. mellan kurvan  $y = \sqrt{1 - x}$  och koordinataxlarna runt  $x$ -axeln.

b. mellan kurvan  $y = \sqrt{1 - x}$  och koordinataxlarna runt  $y$ -axeln.

c. mellan kurvorna  $y = \sqrt{1 - 4x^2}$  och  $y = \sqrt{1 - 2x}$  kring  $y$ -axeln.

d. mellan kurvorna  $y = \sqrt{1 - 4x^2}$  och  $y = \sqrt{1 - 2x}$  kring  $x$ -axeln.

**Uppgifter till Vecka 50**

22. Avgör om följande serier är konvergenta eller divergenta:

a. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{4^n}$$

b. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{3^n}$$

c. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{7+n}$$

d. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)}$$

e. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{5^n}$$

f. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \right)^2$$

23. Avgör om följande serier är konvergenta eller divergenta:

a. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{n^4 + 1}$$

b. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{2^n + 3^n}$$

c. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{2^n + 5^n}$$

d. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2002 + 2003n}$$

e. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$$

f. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{n^3 + n^2}$$

g. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{\sqrt{n}(n^2+1)}$$

h. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2^n}$$

24. Undersök konvergensen av följande serier:

a. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^3}$$

b. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$$

c. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$$

d. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n}{1+2n} \right)^n$$

25. Ange om följande serier är absolut konvergenta, betingat konvergenta eller divergenta:

a. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+3}$$

b. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+3}$$

c. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n+1}$$

d. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + 1}{1+n^2}$$

26. Undersök konvergensen av följande generaliserade integraler:

a. 
$$\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^3+1} dx$$

b. 
$$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^2+1} dx$$

c.  $\int_0^1 \frac{e^x}{1-\sqrt{x}} dx$

d.  $\int_1^\infty \frac{1}{x(1+x^4)} dx$

e.  $\int_0^1 \frac{1}{x(1+x^4)} dx$

f.  $\int_0^\infty \frac{1}{x(1+x^4)} dx$

g.  $\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^4)\sqrt{x}} dx.$