**SVAR OCH LEDNINGAR TILL EXTRA UPPGIFTER**

Analytiska metoder och linjr algebra för P

## Allmänt material

**1.** Låt $a > -1$. Visa att $(1+a)^n \geq 1 + na$ för alla positiva heltal $n$.

Använd induktion.

**2.** Visa att $\sum_{k=1}^{n} k^2 = n(n+1)(2n+1)/6$ för alla positiva heltal $n$.

Använd induktion.

**3.** Bestäm koefficienten framför $x^4$ i utvecklingen av $\left(3x^2 - \dfrac{2}{3x^2}\right)^8$.

Svar: $\binom{8}{3} 3^2(-2)^3 = -2016$

**4.** För vilka $x$ gäller $|x^3 - x^2 + 2| = x^2 - x^3 - 2$?

Svar: alla $x < -1$

**5.** Visa att $-\dfrac{1}{2} \ln \left| \dfrac{1 - 1/\sqrt{2}}{1 + 1/\sqrt{2}} \right| = \ln(1 + \sqrt{2})$.

Förläng med $\sqrt{2}$, förläng med konjugatkvantiteten och använd log-lagar.

## Gränsvärde och kontinuitet

**6.** Låt $f(x) = \dfrac{2x(e^x - 1)}{\arctan x^2}$. Kan man definiera funktionen i origo så att den blir kontinuerlig där?

Ja. Värdet i origo ska i så fall sättas till 2.

**7.** Beräkna gränsvärdet $\lim_{x \to 0} \dfrac{x \sin 2x^3}{\cos 3x^2 - 1}$.

Svar: $-4/9$

**8.** Visa att ekvationen $x^3 - \cos x - e^x + 3 = x^4 + e^{-x} - 1$ har minst två rella lösningar.

Sätt $f(x) = x^3 - \cos x - e^x + 3 - x^4 - e^{-x} + 1$, kolla $f$:s värden i t ex punkterna $-2, 0, 2$ och använd satsen om mellanliggande värden.

**9.** Bestäm Taylorutvecklingen av ordning 2 i punkten $x = -2$ till funktionen $f(x) = e^{2+x} - \tan \pi x$.

Svar: $f(x) = 1 + (1-\pi)(x+2) + \frac{1}{2}(x+2)^2 + \mathcal{O}((x+2)^3)$

**10.** Går det att bestämma värdet på konstanten $a$ så att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(ax-3a) - \ln(x-2)}{1-\cos(ax-3a)}, & \text{då } 2 < x < 3 \\ \sin(x-3) + x^2 - 2x - 2, & \text{då } 3 \le x \le 4 \end{cases}$$

blir kontinuerlig i $x = 3$?

Svar: Ja, $a = 1$.

**11.** Bestäm alla asymptoter till kurvan $y = (\arctan x)/x^2$.

Svar: Lodrät asymptot i $x = 0$, vågrät $y = 0$ i både plus och minus $\infty$.

**12.** Bestäm alla asymptoter till kurvan $y = \dfrac{x^2+1}{x-1}$.

Svar: Lodrät: $x = 1$. Sned asymptot: $y = x + 1$ i $\pm\infty$

**Derivator**

**13.** Visa att funktionen $f(x) = x \arctan \dfrac{1}{x}$ är växande på intervallet $x > 0$.

Visa att derivatan är positiv för alla $x > 0$

**14.** Bestäm de intervall där $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$ är monoton.

Svar: Derivera och kolla derivatans tecken. Svar: Avtagande i intervallet $x \le -1$, växande i intervallet $-1 \le x \le 1$, avtagande i intervallet $x \ge 1$.

**15.** Visa att funktionen $f(x) = 3 \arccos x - \arccos(3x - 4x^3)$ är konstant på intervallet $(-1/2, 1/2)$ och bestäm $f(3/8)$.

Derivera och konstatera (efter lite omskrivningar) att derivatan är noll för alla x i intervallet. Värdet på funktionen är $\pi$ i hela intervallet.

**16.** Visa att $2x \arctan x \le x^2 + \ln(1+x^2)$ för alla $x$.

Sätt $f(x) = 2x \arctan x - x^2 - \ln(1+x^2)$, derivera för att hitta $f$:s största värde och se att detta är 0.

**17.** Bestäm värdemängden till funktionen $f(x) = \arctan \dfrac{x+1}{x-1} - \arctan x$.

Derivera för att hitta max och min. Rätt svar: $-\dfrac{\pi}{4} \le x \le \dfrac{3\pi}{4}$

**18.** Kan funktionen $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+3} + \dfrac{1}{2}$ anta negativa värden?

Derivera för att hitta funktionens minsta värde och konstatera att detta inte är negativt.

**19.** Antar funktionen $f(x) = x\sqrt{5-4x}$ ett största värde på intervallet $-1 \le x \le 1$? Ett minsta? Bestäm i så fall dessa.

Funktionen är kontinuerlig på hela det slutna och begränsade intervallet, och har därför ett största och ett minsta värde. Det största är $\dfrac{5\sqrt{5}}{6\sqrt{3}}$, det minsta $-3$.

**20.** Antar funktionen $f(x) = \arctan 3x - \arctan x$ ett största värde? Ett minsta? Bestäm i så fall dessa.

Ja, det största är $\pi/6$ och det minsta är $-\pi/6$.

**23.** Bestäm värdemängden till funktionen $f(x) = x^{1/x}$, $x > 0$.

Svar: $(0, e^{1/e}]$

**26.** Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen $y'' + y' + 2y = xe^{2x}$.

Svar: $y = e^{-x/2}(A\cos\frac{\sqrt{7}}{2}x + B\sin\frac{\sqrt{7}}{2}x) + (\frac{1}{8}x - \frac{5}{64})e^{2x}$

**27.** Bestäm tangenten och normalen i punkten $(x, y) = (0, 0)$ till kurvan

$$y^3 + xy + x^3 + e^{\cos(2x+3y)} = 1.$$

Det går inte!

**28.** Bestäm tangenten och normalen i punkten $(x, y) = (1, 2)$ till kurvan

$$\sqrt{x^2 + y^2 + 4} + \cos(\pi xy) = 4.$$

Tangent: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$, Normal: $y = 2x$.

**29.** Låt $f(x) = (x+2)\sqrt{2-x}$. Skissera kurvan $y = f(x)$.

Funktionen är växande på intervallet $(-\infty, 2/3)$, tar sitt största värde i $x = 2/3$ och avtar sedan på intervallet $(2/3, 2)$.

## Integraler

**32.** Beräkna $\displaystyle\int \sin^3 x\, dx$.

Använd att $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ och sätt $\cos x = t$. Svar: $\frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C$

**33.** Beräkna $\displaystyle\int \arctan x\, dx$.

Integrera partiellt. Svar: $x\arctan x - \dfrac{1}{2}\ln(1 + x^2) + C$

**34.** Beräkna $\displaystyle\int \arctan\sqrt{x}\, dx$.

Sätt först $\sqrt{x} = t$ och integrera sedan partiellt. Svar: $(x\arctan\sqrt{x} - \sqrt{x} + \arctan\sqrt{x})/2 + C$

**36.** Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \frac{\tan x\,dx}{(\cos x)^2}$.

Sätt $\tan x = t$. Svar: $1/6$

**38.** Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{x}{x^3-3x+2}\,dx$.

Partialbråksuppdela. Integranden blir $\displaystyle\frac{1}{3}\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{9}\frac{1}{x-1} - \frac{2}{9}\frac{1}{x+2}$. Svar: $\displaystyle\frac{1}{3} - \frac{2}{9}\ln\frac{5}{2}$

**39.** Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{x^2-1}{x^3-3x+2}\,dx$.

En primitiv funktion är $\displaystyle\frac{1}{3}\ln(x^3-3x+2)$. Svar: $\displaystyle\frac{1}{3}\ln\frac{5}{16}$

**40.** Beräkna arean av det ändliga område som innestängs av kurvan $y^2 = x^2\sqrt{1-x}$.

$A = \displaystyle\int_0^1 2x(1-x)^{1/4}\,dx = 32/45$

**Serier**

**41.** Avgör om serien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{\sqrt{n}(1+n)}$ är konvergent.

Divergent

**42.** Avgör om serien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{\sqrt{n}(1+n^2)}$ är konvergent.

Konvergent

**43.** För vilka värden på konstanten $a$ är serien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n+a}{n}\right)$ konvergent?

$a = 0$

**44.** Går det att bestämma konstanten $a$ så att serien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{a/n} - \frac{n+1}{n}\right)$ blir konvergent?

Ja, $a = 1$

**45.** Går det att bestämma konstanten $a$ så att serien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin\frac{1}{n} + \frac{a}{n}\right)$ blir konvergent?

Ja, $a = -1$

**46.** Avgör om serien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right)$ är konvergent.

Konvergent

**50.** Beräkna summan av serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{e^{2n-1}}$.

Detta är en geometrisk serie. Svar: $\frac{2e}{1-\frac{2}{e^2}}$

**Linjär algebra**

**51.** Låt $A$ vara en $n \times n$-matris sådan att $\det A = 2$. Bestäm $\det 2A$.

Svar: $\det 2A = 2^{n+1}$

**52.** Låt $A$ vara som i föregående uppgift. Beräkna $\det(A^3 A^T A^{-1} A^{-1})$.

Svar:4

**53.** Beräkna minsta avståndet från punkten $(1, 0, 4)$ till planet $x - 5y + z = 1$.

Svar: $4/\sqrt{27}$

**53.** Låt $u$ vara ortsvektorn till punkten $(5, 1, 1)$. Dela upp $u$ i två komposanter, varav den ena är parallell med linjen $r(t) = (1 + t, 2t, -2 + 2t)$.

Svar: $u = (1, 2, 2)^T + (4, -1, -1)^T$

**54.** Finn alla $2 \times 2$-matriser $A$ sådana att $A^T = A^{-1}$.

Svar: Om $A$ har element $a, b, c, d$ så ska $a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 1$ och dessutom ska $ab + cd = 0$. Ett annat sätt att säga det här är: kolonnerna i $A$ ska vara ortogonala enhetsvektorer. (Kan också uttryckas i termer av radvektorer)

**55.** Anta att de inverterbara matriserna $A$ och $B$ uppfyller att $\det(AB^T) = 5$. Vad kan du säga om $\det(AB)^{-1}$ ?

Svar: 1/5

**56.** Skär linjerna $r(s) = (s, 2 + 3s, 4)$ och $p(t) = (t + 1, 2, 5 + t)$ någonsin varandra?

Svar: Ja, i punkten $(0, 2, 4)$ och ingen annanstans.

**57.** Bestäm ekvationen för det plan som innehåller punkten $(1, 2, 3)$ och linjen $r(s) = (s, 2 + 3s, 4)$.

Svar: $3x - y + 3x = 10$

**58.** Spegla punkten $(1, 2, 1)$ i planet $2x - 2y - z = 0$.

Svar: $(7/3, 2/3, 1/3)$

**59.** Finn ett polynom av grad 2 vars graf går genom punkterna $(1,9)$, $(2,16)$ och $(-1,13)$.

Svar: $3x^2 - 2x + 8$

**60.** Låt $A$ vara en inverterbar $n \times n$-matris. Bevisa att $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Lösning: Den matris som är invers till $A^T$ är den matris som gånger $A^T$ ger $E$. Men $A^{-1T} A^T = (AA^{-1})^T = E^T = E$ så det måste vara den.