

Institutionen för Matematik
KTH
Lars Filipsson

Några extra uppgifter på moment 4

5B1133 Analytiska metoder och linjär algebra 2 för P

Dessa uppgifter är på KS-nivå och är svårare än Veckans uppgifter. Man bör alltså börja med att läsa AM II kap 9 och 10 samt räkna och förstå Veckans. Först därefter ger man sig på nedanstående problem. Uppgifterna nedan är i hög grad inspirerade av (och ibland till och med identiska med) uppgifter och exempel i AM II och AM II Övningsbok. Titta alltså flitigt i dessa böcker. I Övningsboken finns också ledningar till många uppgifter.

1. Vad menas med $\iint_D f(x, y) dx dy$? Förklara dels med egna ord, dels med hjälp av en matematisk definition.
2. Är alla funktioner integrerbara? Varför inte? Ge exempel på en funktion som inte är integrerbar över en mängd D .
3. Beräkna integralen $\iint_D -xy \sin(x^2 + y^2) dx dy$, där $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \sqrt{\pi}, 0 \leq y \leq \sqrt{\pi}\}$.
4. Beräkna integralen $\iint_D e^{y-x} dx dy$, där D är triangeln med hörn i $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$.
5. Beräkna integralen $\iint_D \frac{4x^3}{(1+y)^2} dx dy$, där $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$.
6. Beräkna integralen $\iint_D \frac{\sqrt{x}}{1+xy^2} dx dy$, där $D = \{(x, y) : y^2 \leq x \leq 1\}$.

7. Beräkna integralen $\iint_D \frac{y^2}{1+y^4x^2} dx dy$, där $D = \{(x, y) : 1 \leq y \leq 2, 0 \leq xy \leq 1\}$.
8. Förklara varför man kan räkna ut en dubbelintegral med hjälp av upprepad enkelintegration.
9. Beräkna integralen $\iiint_K \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) dx dy dz$, där $K = \{(x, y, z) : 1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2, 1 \leq z \leq 2\}$.
10. Beräkna integralen $\iiint_K xyz dx dy dz$, där $K = \{(x, y, z) : 0 \leq y \leq 1-x, 0 \leq z \leq 1-x-y, 0 \leq x \leq 1\}$.
11. Förklara principerna för variabelsubstitution i dubbelintegraler, särskilt varför man måste multiplicera med en viss faktor. Ge exempel på några lyckade substitutioner.
12. Beräkna integralen $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, där $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2, y \geq |x|\}$.
13. Beräkna integralen $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, där $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2, y \geq 0\}$.
14. Beräkna integralen $\iint_D (x+y)e^{x-y} dx dy$, där D är kvadraten med hörn i $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 2)$, $(-1, 1)$.
15. Beräkna integralen $\iiint_K \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy dz$, där $K = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$.

16. Förklara hur variabelsubstitution med sfäriska koordinater går till. Rita stor och tydlig figur.
17. Beräkna integralen $\iiint_K x^2 + y^2 \, dx dy dz$, där $K = \{(x, y, z) : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$.
18. Beräkna arean av den del av paraboloiden $z = x^2 + y^2$ som ligger inom sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 6$.
19. Beräkna arean av spiralytan $(x, y, z) = (u \cos v, u \sin v, v)$, $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 2\pi$.
20. Beräkna volymen av den kropp som begränsas av konen $x^2 + y^2 = z^2$ och halvsfären $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, $z \geq 0$.
21. Beräkna arean av den begränsade yta som begränsas av kurvorna $xy = 4$, $xy = 8$, $y = x$ och $y = 2x$, där $x > 1$.
22. Beräkna arean av ytan $z = y + 2\sqrt{x}$, där $y^2 \leq x \leq 1$.
23. Beräkna kurvintegralen $\int_{\gamma} xy \, dx + x^2 \, dy$ där γ är den bit av kurvan $y = x^2$ som ligger mellan $(0, 0)$ och $(1, 1)$.
24. Beräkna kurvintegralen $\int_{\gamma} y \, dx - x \, dy$ där γ är den bit av enhetscirkeln $x^2 + y^2 = 1$ som ligger mellan $(1, 0)$ och $(0, 1)$.
25. Vad menas med en kurvintegral? Finns det några tillämpningar? Skriv upp några olika vapen som kan användas mot motspänstiga kurvintegraler.
26. Beräkna kurvintegralen $\int_{\gamma} (e^x \cos x - y) \, dx + (2xy + \arctan y^2) \, dy$ där γ är ett varv i positiv led längs triangeln med hörn i $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$.

27. Beräkna kurvintegralen $\int_{\gamma} (x^2 + y) dx + (x + y^2) dy$ längs kurvan $|x - y| + 2x + y = 3$ från $(1, -1)$ till $(-3, 3)$.
28. Beräkna kurvintegralen $\int_{\gamma} \frac{2xy dx + (x^2 - 1 - x^4 y^2) dy}{1 + x^4 y^2}$ längs kurvstycket $x^3 + 7y^2 = 8$ i första kvadranten från $(2, 0)$ till $(1, 1)$.
29. Du vill beräkna $\int_{\gamma} xy^2 dx + x^2 y dy$ längs övre halvan av enhetscirkeln från $(1, 0)$ till $(0, 1)$. Din vän ingenjör Inge Njör från Insnön påstår att du lika gärna kan integrera längs x -axeln istället och då ser man direkt att kurvintegralen blir noll. Har han rätt?
30. Beräkna kurvintegralen $\int_{\gamma} \ln|x - y| dx + \ln|x - y| dy$ längs triangeln med hörn i $(0, 3)$, $(2, 3)$ och $(1, 2)$, genomlöpta i den ordningen.
31. Du vill beräkna $\int_{\gamma} \frac{x}{y} dx - \frac{x^2}{2y^2} dy$ från $(3, 1)$ till $(1, 3)$ längs övre halvan av cirkeln $x^2 + y^2 = 10$. Din trogne medhjälpare Enzendo Vaddoro, en kille med någon slags examen, oklart vilken, antagligen från Glömskans Universitet, säger: Skit i å integrera, det är helt onödigt, eftersom $x^2/2y$ är en potentialfunktion till fältet i fråga behöver man bara sätta in slutpunkt och startpunkt i den och minusa och sen är det klart. Har han rätt?
32. Beräkna kurvintegralen $\int_{\gamma} \frac{x dy - y dx}{(x + y)\sqrt{xy}}$ längs cirkelbågen $x^2 + y^2 = 10$ i första kvadranten från $(3, 1)$ till $(1, 3)$.