Institutionen för Matematik
KTH
Lars Filipsson

Lösningsförslag till
Kontrollskrivning 1 den 6/2 kl 9.15-10.15

5B1133 Amelia 2 för P vt 2004

Version A

1. Bestäm matrisen i standardbasen för den linjära avbildning i planet som består i ortogonal projektion på linjen $y = x$.

Lösning: Kalla avbildningen i fråga för T. I matrisen för T utgörs då första kolonnen av bilden av första basvektorn och andra kolonnen av bilden av andra basvektorn. Av symmetriskäl är det klart att $T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/2\\1/2\end{pmatrix}$ och att $T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/2\\1/2\end{pmatrix}$ varför matrisen för avbildningen måste vara $\begin{pmatrix}1/2 & 1/2\\1/2 & 1/2\end{pmatrix}$. (Om man tycker symmetri är svårt kan man lika snabbt lösa uppgiften genom att projicera basvektorerna på linjens riktningsvektor med hjälp av gamla hederliga projektionsformeln).

Svar: $\begin{pmatrix}1/2 & 1/2\\1/2 & 1/2\end{pmatrix}$

---

2. Avgör om vektorerna $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ är linjärt oberoende. Bildar de en bas för $\mathbb{R}^3$?

Lösning: Vektorerna är linjärt oberoende precis när ekvationssystemet

$$c_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

bara har lösningen $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Eftersom $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 5 \neq 0$ så är matrisen inverterbar vilket betyder att ekvationssystemet har unik lösning som då måste vara $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Svar alltså: ja, de är linjärt oberonde. Eftersom de är tre stycken följer också att de bildar en bas för $\mathbb{R}^3$.

Svar: Ja, de är linjärt oberoende och bildar en bas för $\mathbb{R}^3$.

---

3. Låt $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildning som i standardbasen ges av matrisen $\begin{pmatrix} -11 & 30 \\ -4 & 11 \end{pmatrix}$. Finns det någon bas för $\mathbb{R}^2$ i vilken matrisen för T är diagonal? Skriv i så fall upp vad de nya basvektorerna har för koordinater i standardbasen och skriv också upp matrisen för T i den nya basen.

Lösning: Egenvärdena till den givna matrisen fås som lösningar till

$$\det \begin{pmatrix} -11-\lambda & 30 \\ -4 & 11-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

dvs som lösningar till $(-11-\lambda)(11-\lambda)+120 = 0$. Ekvationen förenklar till $\lambda^2 - 1 = 0$ med lösningar ± 1, som alltså är egenvärdena till matrisen.

Egenvektorer hörande till egenvärdet 1 fås som lösningar till

$$\begin{pmatrix} -11-1 & 30 \\ -4 & 11-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vi ser att lösningarna är (den som har svårt att se det direkt får lov att Gaussa här): $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Egenvektorer hörande till egenvärdet -1 fås som lösningar till

$$\begin{pmatrix} -11-(-1) & 30 \\ -4 & 11-(-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vi ser att lösningarna är (den som har svårt att se det direkt får lov att Gaussa här): $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Väljer man $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ till nya basvektorer (med koordinater givna i standardbasen) så får matrisen för den linjära avbildningen T utseendet: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Svar: Nya basvektorer: $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, ny matris för T: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.