

**Lösningsförslag till
Kontrollskrivning 1 den 6/2 kl 9.15-10.15**

5B1133 Amelia 2 för P vt 2004

Version B

1. Bestäm matrisen i standardbasen för den linjära avbildning i planet som består i ortogonal projektion på linjen $y = -x$.

Lösning: Kalla avbildningen i fråga för T . I matrisen för T utgörs då första kolonnen av bilden av första basvektorn och andra kolonnen av bilden av andra basvektorn. Av symmetriskäl är det klart att $T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$ och att $T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ varför matrisen för avbildningen måste vara $\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$. (Om man tycker symmetri är svårt kan man lika snabbt lösa uppgiften genom att projicera basvektorerna på linjens riktningsvektor med hjälp av gamla hederliga projektionsformeln).

Svar: $\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

2. Avgör om vektorerna $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ är linjärt oberoende. Bildar de en bas för \mathbb{R}^3 ?

Lösning: Vektorerna är linjärt oberoende precis när ekvationssystemet

$$c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bara har lösningen $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Eftersom $\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \\ -6 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 0$ så kan systemet inte ha unik lösning. Eftersom högerledet är en nollvektor måste det då finnas oändligt många lösningar, speciellt finns det då lösningar där inte alla c_i är 0. Vektorerna är alltså inte linjärt oberoende och bildar därmed inte en bas för \mathbb{R}^3 .

Svar: Nej, de är inte linjärt oberoende och bildar inte en bas för \mathbb{R}^3 .

3. Låt $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildning som i standardbasen ges av matrisen $\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Finns det någon bas för \mathbb{R}^2 i vilken matrisen för T är diagonal? Skriv i så fall upp vad de nya basvektorerna har för koordinater i standardbasen och skriv också upp matrisen för T i den nya basen.

Lösning: Egenvärdena till den givna matrisen fås som lösningar till

$$\det \begin{pmatrix} -3 - \lambda & 4 \\ 4 & 3 - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

dvs som lösningar till $(-3 - \lambda)(3 - \lambda) - 16 = 0$. Ekvationen förenklar till $\lambda^2 - 25 = 0$ med lösningar ± 5 , som alltså är egenvärdena till matrisen.

Egenvektorer hörande till egenvärdet 5 fås som lösningar till

$$\begin{pmatrix} -3 - 5 & 4 \\ 4 & 3 - 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vi ser att lösningarna är (den som har svårt att se det direkt får lov att Gaussa här): $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Egenvektorer hörande till egenvärdet -5 fås som lösningar till

$$\begin{pmatrix} -3 - (-5) & 4 \\ 4 & 3 - (-5) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vi ser att lösningarna är (den som har svårt att se det direkt får lov att Gaussa här): $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Väljer man $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ till nya basvektorer (med koordinater givna i standardbasen) så får matrisen för den linjära avbildningen T utseendet: $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$

Svar: Nya basvektorer: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, ny matris för T : $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$.